Adi diferansiyel denklemler notlari

Arzu Erdem

[1]

Kaynaklar:	1. Kayley Rectorys- Survey of Applicable Analysis 2. William Boyce and Richard DiPrima - Elementary differential equations and boundary value problems 3. Shepley Ross - Introduction to ordinary differential equations 4. Nail Ibragimov - A practical course in differential equations and mathematical modeling 5. Nese Dernek ve Ahmet Dernek- Diferansiyel denklemler 6. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları - Mehmet Aydın, Beno Kuryel, Gönül Gündüz, Galip Oturanç 7. B.Demidovitch - Matematik analiz ve alistirma problemleri derlemesi	
iletişim için : erdem.arzu @ gmail.com , web page: http://umm.kocaeli.edu.tr/dosyalar/dif.htm		
25 Agustos 2009		

Contents

Bibliography 127

List of Figures

List of Tables

CHAPTER 0

Giriş

1. Matematiksel modeller

Türevleri içeren denklemlere kısaca diferansiyel denklem denir. Böylece akışkan haraketi, elektrik devresindeki akımı, katı bir nesnedeki ısı transferi, sismik dalgaların belirlenmesi, popülasyon artımı vey azalması ve daha birçok benzeri problemleri anlamak ve onları incelemek için diferansiyel denklemler hakkında bilgi sahibi olmak gerekmektedir.
Diferansiyel denklemler, fiziksel modeli ifade ederler ve matematiksel model şeklinde adlandırılırlar. Diferansiyel denklemleri çözmenin temel amacı fiziksel yöntemi ifade eden matematiksel model hakkında birşeyler öğrenmeye çalışmaktır Kompleks ve doğal bir yöntemi anlamak aslında onu en basite indirgemekten geçer. Böylece bu modelleri ifade eden denklemler hakkında bilgiler ve onların çözümleri için öncelikle onların basit modelleri hakkında bilgi sahibi olmalıyız. .

1.1. Populasyon modeli. Thomas Robert Malthus tarafından 1978 yılında geliştirilmiş olan bir problemdir. Onun modeline göre populasyon orantılı olarak artmaktadır ve populasyonu P ile gösterdiğimizde, aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilmektedir.

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P,\ \alpha = sabit > 0$$

Böylece limitsiz büyüme bu diferansiyel denklemin çözümü olan ve exponansiyel kural olarak da adlandırılan

$$P(t) = P_0 \exp(\alpha(t - t_0))$$

fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Burada $P_0,\ t = t_0$ anındaki populasyon ve $P(t)$ ise keyfi t anındaki populasyon olarak gösterilmektedir. Daha sonraları bu modelin çok gerçkeçi olmadığı gözlenerek, model mantıksal model olarak adlandırlılmıştır ve

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P - \beta P^2,\ \alpha, \beta = sabit \neq 0$$

diferansiyel denkelemi ile ifade edilmiştir.

1.2. Ekoloji: Radyoaktif atık ürünler. Radyoaktiviti, yüksek atom ağırlıklı (uranyum minerali gibi) elementlerin kırılması sonucu elde edilir. Yapay radyoaktiviti kimya, tıp ve nükleer enerji gibi alanlarda çok kullanışlıdır. Fakat nükleer enerjinin endüstrisel kullanımı son derece dikkat gerektiriyor. Çünkü radyoaktif atık maddeler populasyon açısından tehlike oluşturmaktadır. Radyoaktif bozulmanın matematiksel ifadesi, bozulma ile orantılı olarak ifade edilir ve diferansiyel denklemi

$$\frac{dU}{dt} = -kU,\ k = sabit > 0$$

burada U maddenin keyfi t anındaki rayoaktiflik oranını göstermektedir. Bu denklemin çözümü

$$U(t) = U_0 \exp(-k(t - t_0))$$

şeklinde ifade edilir.

1.3. Kepler kanunu ve Newton'un yerçekimi kuralı. Bilindiği üzere eski yunan biliminde gezegenlerin güneş ekseni etrafında dairesel hareketler ile döndüğü iddia edilmişti. 1609 yılında Kepler tarafından gezegenlerin güneş etrafında eliptik hareketler ile döndüğü kanıtlanmıştır. Bu kuram Kepler'in 1. ve 2. kuralları olarak da adlandırılmaktadır. Kepler gezegenlerin nasıl hareket ettiği sorusunun cevabını vermiştir ancak neden sorusunun cevabı daha sonra Galileo Galilei ve Newton tarafından verilmiştir. Newton'un yerçekimi kuralına göre, güneş ve gezegenler arasında çekim kuvveti

$$F = \frac{\alpha}{r^3}x,\ \alpha = -GmM$$

olarak ifade edilmiştir. Burada G genel yerçekimi sabiti m ve M sırasıyla gezegen ve güneşin kütleleridir. Böylece gezegenlerin çekimleri altında güneşin hareketini ihmal edersek

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\alpha}{r^3}x,\ \alpha = sabit$$

Newton'un 2. kuralı olarak ifade edilmiştir. Bu problemin integral alınması ile elde edilen problem de Kepler problemi olarak adlandırılmıştır.

1.4. Dünya yakınında serbest düşme hareketi. Dünya üzerinde, yerçekiminin sabit olduğunu varsayarak serbest düşme hareketini ele alalım. $m = sabit$ kütlenin ağırlığı h yükseklik t zaman $g \approx 981\ cm/sn^2$ sürtünme ivmesini göstermek üzere, sürtünme kuvveti

$$F = -mg$$

olarak gösterilir ve Newton denklemi

$$\frac{d^2h}{dt^2} = -g$$

olarak yazılır. Bunun çözümü

$$h = -\frac{g}{2}t^2 + c_1t + c_2$$

olarak bulunur. Burada $c_{1,}, c_2$ keyfi sabitlerdir.

1.5. Soğutma (ısınma) için Newton modeli. Soğutma (ısınma) olayı, hayatımızın her alanında kullanılan bir işlemdir. Havayı soğutma işlemleri, fırını ısıtma vb. Newton'un soğutma kuramı olarak adlandırılan model

$$\frac{d\tau}{dt} = k\left(T - t\right),\ k = sabit > 0$$

ile ifade edilir. Burada $T\left(t\right)$ soğutulan nesnenin hiçbir etki göstermediği sıcaklıktır(doyum noktası). $\tau\left(t\right)$ keyfi t anındaki sıcaklık ve t zamanı göstermektedir.
Bir binanın klima tarafından ısıtıldığını varsayalım. $H\left(t\right)$ ile sıcaklığın artım oranını $A\left(t\right)$ ile sıcaklığın değişim oranını gösterirsek, yukarıdaki denklemi

$$\frac{d\tau}{dt} = k\left(T - t\right) + H\left(t\right) + A\left(t\right)$$

olarak düzenleyebiliriz.

1.6. Mekanik titreşim ve Sarkaçlar. Yaprakların rüzgarda hışırtısı, suyun dalgalanması bu modeller için bazı fiziksel olaylardır. En temel salınım hareketi, bir yere sabit asılı olan bir bobinden ağır bir cisimin ileri geri hareketidir. Hooke yasasına göre başlangıç anından karşı tarafa olan hareketi

$$F_1 = -ky,\ k = sabit$$

olarak yazılır. Burada y yerdeğiştirmeyi gösterir. Sürtünme kuvvetini de

$$F_2 = -l\frac{dy}{dt}$$

olarak yazabiliriz. $f\left(t\right)$ ile toplam dış kuvveti (rüzgar) gösterirsek, Newton'un 2. kuralına göre

$$F = F_1 + F_2 + f\left(t\right)$$

ve model

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + l\frac{dy}{dt} + ky = f\left(t\right)$$

1.7. Asfaltların çökmesi. Asfaltların periyodik biçimde çökmesi aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilir

$$\mu\frac{d^4u}{dx^4} = f$$

burada u yolun düz pozisyonundan çökmesi sonucu elde edilen yer değiştirmesi ve f merkezkaç kuvvetinin yoğunluğudur.

1.8. Van der Pol denklemi. Elektrik kondensatorlerinin devreleri arasındaki elektrik akımı

$$C\frac{dV}{dt} = -I,\ V - L\frac{dI}{dt} = RI$$

olarak yazılır. Burada $I(t)$ akım, $V(t)$ voltaj, R resistans, C kondensatorün kapasitesi, L bobinin indüktansını göstermektedir. Burada V yi y ile gösterirsek, modeli

$$ay\prime\prime + by\prime + cy = 0$$

olarak yazabiliriz. $a = LC,\ b = RC,\ c = 1.$

1.9. Telegraf denklemi. Elektrodinamikte, kablolar üzerindeki akımı ifade eden denkleme telegraf denklemi denir ve modeli aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} + (a+b)\, v_t + abv &= 0, \\ c^2 &= \frac{1}{CL},\ a = \frac{G}{C},\ b = \frac{R}{L} \end{aligned}$$

$C = kapasite,\ L = kendini\ indükleme,\ R = resis\tan s,\ G = ka$çak.

1.10. Maxwell denklemi. Elektromagnetik alan 2 bileşene sahiptir. E elektrik alanı gösteren vektör ve H magnetik alanı gösteren vektör. Buna göre model bir çift denklemden oluşur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= c(\nabla \times H) - 4\pi j,\ \nabla \cdot E = 4\pi\rho \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -c(\nabla \times E),\ \nabla \cdot H = 0 \end{aligned}$$

j ve ρ elektrik akım ve yüklenme yoğunlukları, $c \approx 3 \times 10^{10}$ ışık hızını göstermektedir. Bu denklem sistemini fizikte genelde

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} &= curlH - \frac{4\pi}{c}j,\ divE = 4\pi\rho \\ \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} &= -curlE,\ divH = 0 \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

1.11. Navier-Stokes Denklemi. Yapışkan maddelerin akımı bu tür denklemler ile ifade edilir

$$v_t + (v.\nabla)\, v + \frac{1}{\rho}\nabla p = v\Delta v$$

p basınç, ρ yoğunluk, v akışkanın hızını göstermektedir.

1.12. Sulama(irrigation) sistemlerinin modellemesi. Sulama sistemlerinin matematiksel modeli

$$C(\psi)\,\psi_t = (K(\psi)\,\psi_x)_x + (K(\psi)(\psi_z - 1))_z - S(\psi)$$

şeklindedir. Burada ψ topraktaki nem basıncı, $C(\psi)$ toprağın su kapasitesi, $K(\psi)$ hidrolik iletkenliğin doyum oranı, $S(\psi)$ kaynak fonksiyonu, t zaman, x yatay eksen, z dikey ekseni göstermektedir.

1.13. Isı denklemi. Yayılma(difüzyon) yönetmelerini ifade eden modeller genel olarak

$$u_t = \nabla \cdot (k(x)\,\nabla u)$$

şeklinde ifade edilir.

1.14. Burgers ve Korteweg-de Vries denklemleri. Burgers denklemi

$$u_t = u\ u_x + \nu u_{xx}$$

genelde akışkanlar mekaniğinde ve nonlinear akustik problemlerinde kullanılmaktadır.
Korteweg-de Vries denklemi

$$u_t = u\ u_x + \mu u_{xxx}$$

kanallardaki büyük su dalgalarının yayılmasını modeller.

1.15. Finansta matematiksel model. Matematiksel finanstaki temel çalışmalar dalgalanan stok fiyatlarıdır ve aşağıdaki denklem ile ifade edilir

$$u_t + \frac{1}{2}A^2x^2u_{xx} + Bxu_x - Cu = 0, \ \ A, B, C = sabit.$$

1.16. Büyüyen tümör modeli. Bu model lineer olmayan diferansiyel denklem ile ifade edilir

$$\begin{aligned} u_t &= f(u) - (uc_x)_x \\ c_t &= -g(c, p) \\ p_t &= h(u, c) - Kp \end{aligned}$$

u, c,p sırasıyla hastalıklı hücrenin konsantrasyonu, hücre dışı sıvısı, proteaz (enzimlerin parçalanmasını sağlayan enzim grubu).

1.17. Dalga denklemi. Tel vb. gibi maddeler üzerindeki dalgalanma hareketi

$$u_{tt} - k^2(x)\Delta u = F(x, t)$$

ile ifade edilir.

1.18. Diferansiyel Denklemlerin Tarihi. Diferansiyel denklemleri tanımadan ve onların çözümleri hakkında bilgi sahibi olmadan önce biraz tarihinden bahsedelim. Diferansiyel denklemler konusu ilk olarak Isaac Newton(1642–1727) ve Gottfried Wilhelm Leibniz(1646–1716) tarafında 17 yüzyılda çalışılmaya başlanmıştır. Newton, İngiltere de büyüyüp, Trinity koleji- Cambridge de eğitim almıştır ve 1669 da Lucasian (tün professötlük hizmetlerinin bağlı olduğu) profesörü olmuştur. Devrim yaratan çalışmaları hesaplamada ve mekanik prblemlerde, 1665 yılında gerçekleşmiştir. Matematik camisaı tarafından kabul görmesine rağmen, Newton eleştiriler hakkında çok hassas olduğundan çalışmalarını 1687 ye kadar basmamıştır. 1687 yılında çok ünlü kitabı Philosophiae Naturalis Principia Mathematica baılmıştır. Newton diferansiyel denklemler ile çalışmalarını yürütürken,hesaplamada ve mekanikteki temel gelişmeleri Euler tarafından sağlandı. Newton, 1. mertebeden diferansiyel denklemleri $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$, ve $dy/dx = f(x, y)$ formunda sınıflandırdı. Sonrasında ise $f(x, y)$ x ve y nin polinomu olduğunda, serileri kullanarak çözüm yöntemi geliştirdi. Newton'un aktif çalışmaları 1690 ların başlarında son buldu ve daha önce elde etmiş olduğu sonuçların yayınlanması ve düzenlenmesi çalışmalarını gerçekleştirdi. 1696 da British Mint te tekrar profesör oldu. 1705 de şövalye olarak ilan edildi ve Westminster Abbey de gömüldü.

Leibniz, 20 yaşında Leipzig de Altdorf üniversitesinde, filozofi alanında doktora çalışmasını tamamladı Hayatı boyunca, birkaç alandaki çalışmaları ile meşgül oldu. Öncelikli alanları arasında matematik vardır çünkü 20 li yaşlarında bu alanda çalışmalar gerçekleştirmiştir. Newton dan biraz sonra olmasına rağmen diferansiyel denklemler ile ilgili temel sonuçlara ulaşmıştır fakat 1684'te Newton dan önce basılmıştır. Matematiksel notasyonları kullanma konusunda çok iyidir ve türev için dy/dx ve integral sembolünün kullanımları ona aittir. 1691 yılında değişkenlere ayırma yöntemini vermiştir ve homojen denklemleri, değişkenlerine ayrılabilen diferansiyel denklemlere indirgemiştir. 1. mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünü 1694 yılında vermiştir. Hayatını bir elçi gibi yaşamıştır ve Alma kraliyet ailelerine tavsiyelerde bulunmuştur. Bu görevi sayesinde, çok sayıda gezi düzenlemiş ve yazışmalarını diğer matematikçilere taşıyabilmiştir. Özellikle de Bernoulli kardeşlere. Bu işbirliği sayesinde pek çok problem 17 yüzyılda çözülebilmiştir.

Jakob(1654–1705) ve Johann(1667–1748) Bernoulli kardeşler diferansiyel denklemlerde yöntemler geliştirip bunların uygulama alanlarını genişletmişlerdir. Jakob, 1687 de Basel de profesör olmuştur. Johann, kardeşinin 1705 yılında ölmesinden sonra aynı göreve getirilmiştir. Her iki adamda kavgacı kıskanç ve özellikle de kendi tartışmalarında sıkça karıştırılırlardı. Yine de her ikisi de matematikte çok önemli gelişmelere imza atmışlardır. Hesaplamaların da yardımı ile mekanikte diferansiyel denklem olarak ifade edilen problemler için çözüm yöntemleri geliştirmişlerdir. 1690 da Jacob $y\prime = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ diferansiyel denklemini çözmüştür ve makalesinde ilk defa integral terimine yer vermiştir. 1694 te Johann $dy/dx = y/ax$. diferansiyel denkleminin çözümünü elde etmiştir. Geliştirdikleri en önemli problemlerden birisi de brachistochrone problemidir.

Johann'ın oğlu olan Daniel Bernoulli(1700–1782), daha henüz yeni kurulmuş olan St. Petersburg akademisen göç etti ancak 1733 de Basel'e botanik ve daha sonra da fizik profesörü olarak geri döndü. Temel ilgil alanları arasında kısmi diferansiyel denklemler ve onun uygulamalrı vardı. Örneğin adı, akışkanlar mekaniğindeki diferansiyel denklemlere verilmiştir. Ve ayrıca daha sonra Bessel fonksiyonları olarak adlanadırılacak olan fonksiyonlar ile çalışmıştır.

18 yüzyılın en önemli matematikçilerinden birisi de Johann Bernoulli'nin öğrencisi olan ve Basel yakınlarında yaşayan Leonhard Euler(1707–1783) dir. 1727 de arkadaşı Daniel Bernoulli yi takip ederek St. Petersburg a girmiştir. 1727–1741 ve 1766–1783 yılları arasında St. Petersburg akademisinde 1741–1766 de Berlin akademisinde çalışmıştır. Euler bütün zamanın en vermli matematikçilerinde biridir ve tüm çalışmları toplamda 70 dergiyi geçer. İlgi alanı matematiğin ve uygulamanın tüm alanlarını kapsar. Yaşamının son 17 yılını kör olarak geçirmesine rağmen, ölene kadar çalışmlarını devam ettirmiştir. Özellikle de mekaniği matematikde çok iyi kullanırdı. Lagrange, Eulerin mekanik uygulamalrı için "analizdeki en önemli çalışma hareketin bilimine uygulandı" tabirini kullandı. Diğer çalışmaları ile birlikte 1734–35 de diferansiyel denklemin tamlık koşulunu verdi ve aynı çalışmada integral faktörü teorisini geliştirdi. 1743 de sabit katsayılı, homojen lineer denklemler için genel çözüm kavramını verdi. 1750–51 de aynı teoriyi homojen olmayan denklemler için genişletti. 1750 lerin başlarında, diferansiyel denklemlerin çözümü için kuvvet serisi uygulamalrını geliştirdi. 1768–69 lerde nümerik çözüm yöntemleri geliştirdi.

Joseph-Louis Lagrange(1736–1813), 19 yaşında Turin de profesör oldu. 1766 da Berlin akademisinde Eulerin varisi oldu ve 1787 de Paris akademisine geçiş yaptı. En önemli çalışması 1788 de basılmış olan Me ´caniqueanalytique, Newton mekaniğinin çok kapsamlı ve çok güzel bir konusudur. 1762–65 de , n. mertebeden homojen diferansiyel denkleminin genel çözümünün, n tane lineer bağımsız çözümlerinin lineer kombinasyonu olduğunu gösterdi. 1774–75 de parametrelerin varyasyonu olarak biline çalışmayı geliştirdi ve kısmi diferansiyel denklemler ile varyasyonel hesaplamalarda çok temel çalışmaları mevcuttur.

Pierre-Simon de Laplace(1749–1827) çocukluğunu Normandy de geçirdi ancak 1768 de Parise gelerek ve 1773 de Acade ´mie des Sciences'ı kazanarak bilimsel çemberde çok önemli gelişmelere imza atmanın başlangıcını yaşadı. Astroloji'de mekanik alanında çalışmalarda bulunmuştur. Laplace denklemleri matematiksel fiziğin temel denklemlerini olşturur. Laplace dönüşümlerinin faydası ise sonlara doğru daha iyi anlaşılmıştır.

18 yüzyılın sonlarına doğru diferansiyel denklemlerinin çözüm ile ilgili teori geliştirilmiştir. 19. yüzyılda ise daha teorik bir sorunun cevabı irdelenmiştir: varlık ve teklik. Kısmi dfireansiyel denklemler çalışılmaya başlanmış ve onların matematiksel fiziğe uygulamaları ele alınmıştır.

Bazı diferansiyel denklemlerin analitik anlamda çözümlerine ulaşılamaması nümerik çözüm kavramını getirmiştir. 1900 lü yıllarda nümerik integral geliştirilmiştir fakat uygulamaları, elle hespalamaların veya ilkel hesaplama araçlarınının kısıtlılığı ile çok yaygınlaşmamıştır. Özellikle son 50 yıl içinde, hesaplama araçlarının ilerlemesi ve uyduya bağlı bilgisayarların varlığı ile uygulama alanları oldukça yaygınlaşmıştır.

20 yüzyıl, diferansiyel denlklemlerin geometrik ve toploji olarak yeni bir kreasyonudur. Amaç, çözümün geometriksel olarak davranış niteliğini anlamaktır. Daha fazla bilgiye ihtiyaç duyulduğunda, nümerik yöntem ile elde edilen veriler kullanılmıştır.

Son birkaç yılda bu iki trend birlikte gelmiştir. Bilgisayarlar, lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerinin çalışılmasına hız katmıştır.

2. Eğri ailesinin diferansiyel denklemleri

(x, y) düzleminde

$$y = f\left(x, c_1, c_2, ..., c_n\right) \tag{2.1}$$

eğri ailesini düşünelim. Kapalı formada

$$\varphi\left(x, y, c_1, c_2, ..., c_n\right) = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $c_1, c_2, ..., c_n$ uygun parametrelerdir. Eğrinin kapalı formunda kapalı fonksiyonların türevi kuralını uygulayarak n defa türev alabiliriz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y\prime &= 0, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}y\prime^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y\prime\prime &= 0, \\ &\cdots \\ \frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n} + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y^{(n)} &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

n bilinmeyenli sistmede $c_1, c_2, ..., c_n$ parametrelerini yok edersek,

$$F\left(x, y, y\prime, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

n. mertebeden diferansiyel denklemini elde ederiz.

Notasyon 2.1. *$x, y, y\prime, \ldots, y^{(n)}$ değişkenlerine bağlı F fonksiyonun tam diferansiyel denklemi*

$$D_xF = \frac{\partial F}{\partial x} + y\prime\frac{\partial F}{\partial y} + y\prime\prime\frac{\partial F}{\partial y\prime} + \cdots + y^{(n)}\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}$$

olarak gösterilir. Buna göre (2.3) sistemi aşağıdaki şekilde yazılır.

$$D_x\varphi = 0,\ D_x^2\varphi = 0, \ldots, D_x^n\varphi = 0 \tag{2.4}$$

Örnek 2.2. *Doğrular ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.*

Çözüm $\varphi = y - ax - b$ yazarak $(2.4)'$ten

$$D_x\varphi = y\prime - a = 0,\ D_x^2\varphi = y\prime\prime = 0$$

son denklem hiç bir parametre içermediği için diferansiyel denklemi 2. mertebeden lineer denklem olarak

$$y\prime\prime = 0$$

şeklinde ifade edebiliriz. □

Örnek 2.3. *Paraboller ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.*

Çözüm Paraboller ailesini $y = ax^2 + bx + c$ olarak yazabiliriz. $\varphi = y - ax^2 + bx + c$ fonksiyonunu (2.4) te kullanırsak,

$$D_x\varphi = y\prime - 2ax - b = 0,\ D_x^2\varphi = y\prime\prime - 2a = 0,\ D_x^3 = y\prime\prime\prime = 0$$

□

elde ederiz. Böylece paraboller ailesinin diferansiyel denklemi 3. mertebeden lineer denklemdir.

Alıştırma 2.4. *Çemberler ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.*

Çözüm Çemberler ailesini $(y-b)^2 + (x-a)^2 = c^2$ olarak yazabiliriz. $\varphi = (y-b)^2 + (x-a)^2 - c^2$ fonksiyonunu (2.4) te kullanırsak,

$$D_x\varphi = 2(y-b)\,y\prime + 2(x-a) = 0,\ D_x^2\varphi = 2 + 2y\prime^2 + 2(y-b)\,y\prime\prime = 0,\ D_x^3 = 6y\prime y\prime\prime + 2(y-b)\,y\prime\prime\prime = 0$$

elde ederiz. 2. denklemden $y - b = -\left(1 + y\prime^2\right)/y\prime\prime$ elde ederiz. Bunu 3. denklemde yerine yazarsak,

$$y\prime\prime\prime - 3\frac{y\prime y\prime\prime^2}{1 + y\prime^2} = 0$$

denklemini elde ederiz. □

Alıştırma 2.5. *Hiperboller ailesinin diferansiyel denklemini bulunuz.*

Çözüm Hiperboller ailesini $(y-a)(b-cx) = 1$ olarak yazabiliriz. $\varphi = (y-a)(b-cx) - 1$ fonksiyonunu (2.4) te kullanırsak,

$$D_x\varphi = (b-cx)\,y\prime - c(y-a) = 0,\ D_x^2\varphi = (b-cx)\,y\prime\prime - 2cy\prime = 0,\ D_x^3 = (b-cx)\,y\prime\prime\prime - 3cy\prime\prime = 0$$

elde ederiz. 2. ve 3. denklemden $(b - cx)$ terimini yok edersek,

$$y\prime\prime\prime - \frac{3}{2}\frac{y\prime\prime^2}{y\prime} = 0$$

denklemini elde ederiz. □

Uyarı 2.6. *Tam diferansiyel ve kısmi diferansiyel arasındaki farkı aşağıdaki şekilde kavrayabilriz:Tam diferansiyller*

$$D_x(x) = 1,\ D_x(y) = y\prime,\ D_x(xy\prime) = y\prime + xy\prime\prime$$

şeklinde iken, kısmi diferansiyel denklemler

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial (xy\prime)}{\partial x} = y\prime$$

CHAPTER 1

Diferansiyel denklemler ve onların çözümleri

3. Diferansiyel denklemlerin sınıflandırması

Tanım 3.1. *Bilinmeyen fonksiyon ile onun türevleri arasındaki bağıntıya diferansiyel denklem denir.*

Tanım 3.2. *Bilinmeyen fonksiyon bir değişkenli ise denkleme adi diferansiyel (ADD) (ordinary differential equation ODE) denklem denir, eğer fonksiyon çok değişkenli ise kısmi diferansiyel (KDD) (partial differential equation PDE) denklem denir.*

Tanım 3.3. *n tane bilinmeyen fonksiyonu içeren m adet diferensiyel denkleme kısaca diferansiyel denklem sistemi denir. Burada m ile n eşit olmak zorunda değildir.*

Tanım 3.4. *Denklemin mertebesi, denklemdeki en yüksek mertebedeki türevdir. Benzer şekilde sitemin mertebesi, sistemdeki en yüksek mertebeli türevdir.*

Tanım 3.5. *Bir diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeli türevin* üssüne*, bu diferansiyel denklemin derecesi denir.*

Tanım 3.6. *Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve tüm türevleri birinci dereceden ise,diferansiyel denkleme lineer diferansiyel denklem denir.n. mertebeden adi lineer diferansiyel, bağımlı değişken y ve bağımsız değişken x olmak üzere, aşağıdaki formda gösterilir.*

$$\begin{aligned} a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y &= b(x) \ \text{ veya} \\ a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y\prime + a_n(x)y &= b(x) \end{aligned}$$

Dolayısıyla içerisinde y^3 ,$(y\prime\prime)^2, yy\prime, y\prime y\prime\prime\prime, siny, \exp(y)$ gibi terimler bulunan denklemler lineer değildir. Bunun yanında denklem $x^2, xy\prime\prime, sinx, \exp\left(-\sin x^3\right), \ln x$ türünden ifadeler içerebilir.

Örnek 3.7. $y\prime\prime + xy\prime - \exp(y) = 0,$ 2. *mertebeden lineer olmayan adi diferansiyel denklemdir.*

Örnek 3.8. $\frac{d^4y}{dx^4} + x^2\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{dy}{dx} = x\exp(x),$ 4. *mertebeden lineer adi defreansiyel denklemdir.*

Örnek 3.9. $u_t = k(x)u_{xx}$ *veya* $\frac{\partial u}{\partial t} = k(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 2. *mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemdir.*

Örnek 3.10. $\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0,\ \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,$ 3. *mertebeden kısmi diferansiyel denklemler sistemidir.*

4. Temel Kavramlar

Tanım 4.1. *Birinci mertebeden ADD ile*

$$F(x, y, y\prime) = 0 \Leftrightarrow F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{4.1}$$

veya

$$y\prime = f(x, y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{4.2}$$

formlarını düşüneceğiz.

Tanım 4.2. *n. mertebden ADD ile*

$$F\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \Leftrightarrow F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{4.3}$$

ya da

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n-1)}\right) \Leftrightarrow \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{4.4}$$

Tanım 4.3. *Keyfi $g(x)$ fonksiyonu özdeş olarak (4.3).denklemini sağlıyorsa $g(x)$ fonksiyonuna (4.3) denkleminin integrali ya da çözümü denir. (bkz Uyarı 4.6)*

Uyarı 4.4. *ADD genelde bir I aralığında tanımlanır. Böylece $g(x)$ fonksiyonu n mertebeye kadar türevi olan bir fonksiyon ve (4.3) denkleminde y yerine $g(x)$, $y\prime$ yerine $g\prime(x)$,..., $y^{(n)}$ yerine $g^{(n)}(x)$ yazdığımızda (4.3) denklemi sağlanıyorsa, $y = g(x)$ fonksiyonuna I aralığında (4.3) denleminin bir çözümü denir.*

Örnek 4.5. *$y = \sin x$ fonksiyonu $y\prime\prime + y = 0$ denkleminin $(-\infty, \infty)$ aralığında bir genel çözümüdür.*

Uyarı 4.6. *(4.3) denkleminin çözümü $y = g(x)$ açık formunda olmak zorunda değildir. Aynı zamanda $h(x, y) = 0$ kapalı formu ile de verilebilir. Buna göre türevleri kapalı fonksiyonlar için türev formülü kullanılarak bulunur. Böylece benzer şekilde (4.3).denklemi özdeş olarak $h(x, y) = 0$ fonksiyonunun her noktasında özdeş olarak sağlanıyorsa $h(x, y) = 0$ fonksiyonu (4.3) denkleminin integrali ya da çözümüdür.,$y\prime\prime, \ldots, y^{(n)}$ (Bkz. Örnek 4.34)*

Örnek 4.7. *$x^2 + y^2 = 4$ fonksiyonu*

$$y\prime = -\frac{x}{y} \tag{4.5}$$

denkleminin kapalı formda çözümüdür. $x^2 + y^2 - 4 = 0$ çemberinde kapalı fonksiyonlar için türev bağıntısını kullanırsak $2x + 2yy\prime = 0$ elde ederiz, böylece (4.5) denklemi sağlanır. $(-2, 0)$ ve $(2, 0)$ noktalarında $y = 0$ olduğundan bu noktaları hariç tutmalıyız.(Bkz. Örnek Örnek 4.34).

Uyarı 4.8. *(4.2) denkleminin geometrik yorumu: $f(x, y)$, Q bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. (4.2) denklemine göre her $(x, y) \in Q$ noktasında bu noktadan geçen ve eğimi $y\prime$ olan bir doğru (doğrusal eleman) vardır. Böylece bu doğruların oluşturmuş olduğu alana kısaca doğrultu alanı denir. Buna göre Q bölgesindeki eğriyi bulmak, doğruların herbir noktasındaki tanjantı bulmaktır.*

Buna göre 2. mertebeden

$$y\prime\prime = f(x, y, y\prime)$$

denklemi için $y\prime\prime$ yani çözüm eğrisinin eğriliği bulunmalıdır. 3 ve daha yüksek mertebeden ADD için benzeri geomtrik yorumlar yoktur.

Tanım 4.9.

$$y_1 = g_1(x), \; y_2 = g_2(x), \ldots, y_n = g_n(x) \tag{4.6}$$

fonksiyonları

$$\begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array} \tag{4.7}$$

sistemini özdeş olarak sağlıyorsa, (4.6) fonksiyonlarına sistemin çözümü (integrali) denir.

Bu durumda da çözümleri kapalı fonkiyon gibi düşünebiliriz. (Bkz Uyarı 4.6).

Uyarı 4.10. *$n = 2$ durumu için y_1, y_2 fonksiyonları yerine bilinmeyen y, z fonksiyonlarını ele alalım. Buna göre (4.6) fonksiyonları*

$$y = g_1(x), \; z = g_2(x)$$

geometriksel olarak bir eğri tanımlar (3 boyutlu uzayda). Bu sebepten ötürü (4.6) fonksiyonları (4.7) sisteminin integral eğrisi diye adlandırılır.

Uyarı 4.11. *Genel olarak (4.7) sisteminde bilinmeyen fonksiyon sayısı ile denklem sayısı eşit olmak zorunda değildir. Fakat çözüm tanımı aynıdır. Yine de çözümün varlığı ve tekliği hakkında bir genelleme yapmalıyız.*

Teorem 4.12. *(4.7) sistemi ve*

$$P\left(a, b_1, b_2, \ldots, b_n\right) \tag{4.8}$$

noktasını ele alalım. (4.7) sistemindeki $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $n+1$ değişkenli ve değişkenleri $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ olmak üzere, P noktasının bir O komşuluğunda, sürekli ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ değişkenlerine göre sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar olsun. O komşuluğunda (4.7) sistemini ve

$$g_1\left(a\right) = b_1,\ g_2\left(a\right) = b_2, \ldots, g_n\left(a\right) = b_n \tag{4.9}$$

koşulunu (başlangıç koşulu) sağlayan $g_1\left(x\right), g_2\left(x\right), \ldots, g_n\left(x\right)$ fonksiyonları vardır ve bu fonksiyonlar tektir.

Tanım 4.13. *Bir problem diferansiyel denklemi ve belirli koşulları içerir. Problemdeki koşullar x in bir değeriyle ilgili ise bu durumda probleme başlangıç değer problemi, x in 2 değeri ile ilgili ise sınır değer problemi denir.*

Örnek 4.14.

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0, \\ y\left(1\right) &= 3 \\ y'\left(1\right) &= -4 \end{aligned}$$

başlangıç değer problemidir (BDP)- (initial value problem IVP).

Örnek 4.15.

$$\begin{aligned} y'' + y &= 0, \\ y\left(0\right) &= 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 5 \end{aligned}$$

sınır değer problemidir (SDP)- (boundary value problem BVP).

Uyarı 4.16. *Uyarı 4.10'e göre $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları O komşuluğunda yukarıdaki koşuları sağlıyorsa (4.7) sisteminin P noktasından geçen bir tek integral eğrisi vardır.*

Özel durumda

$$f\left(x, y\right), \frac{\partial f}{\partial y}\left(x, y\right) \tag{4.10}$$

fonksiyonları P noktasının O komşuluğunda sürekli ise

$$y' = f\left(x, y\right)$$

denkleminin bir tek integral eğrisi mevcuttur ve bu eğri P noktasından geçer.

Uyarı 4.17. *Eğer her $x \in [a, b], y_1, y_2 \in [c, d]$ için*

$$\left|f\left(x, y_1\right) - f\left(x, y_2\right)\right| \leq K \left|y_1 - y_2\right| \tag{4.11}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif bir K sayısı bulunabilirse $f\left(x, y\right)$.fonksiyonu y değişkenine göre R $\left(a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\right)$ bölgesinde Lipchitz koşulunu sağlar denir. Özel olarak $f\left(x, y\right)$.fonksiyonu y değişkenine göre R bölgesinde türevi mevcut ve

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq K \tag{4.12}$$

koşulu sağlanıyor ise (4.11) koşulu sağlanır. Fakat tersi doğru değildir. Yani y değişkenine göre türevi mevcut olmayabilir fakat (4.11) koşulunu sağlayan fonksiyonlar da vardır. Aşağıdaki örnek bununla ilgilidir.

Örnek 4.18. *$f\left(x, y\right) = |y|$ fonksiyonu y değişkenine göre kısmi türevi yoktur ancak Lipschitz koşulunu sağlar. Gerçekten*

$$\left|\left|y_1\right| - \left|y_2\right|\right| \leq \left|y_1 - y_2\right|,\ K = 1$$

sağlanır.

Teorem 4.19. *$f(x,y)$ fonksiyonu $Q\,(a-h \le x \le a+h,\ b-k \le y \le b+k)$ bölgesinde sürekli olsun (Sürekli fonksiyon kapalı aralıkta sınırlıdır yani Q bölgesinde $|f(x,y)| \le M$ koşulunu sağlayan pozitif M sabiti mevcuttur.) ve (4.11) koşulunu sağlasın.*

$$d = \min\left(h, \frac{k}{M}\right)$$

olmak üzere $[a-d, a+d]$ aralığında

$$y\prime = f(x,y)$$

denklemini sağlayan $y = g(x)$ bir tek çözümü vardır.

Uyarı 4.20. *Lipschitz koşulu ve Teorem 4.19'ye benzer teorem (4.7) sistemi içi de formüle edilebilir.*

Uyarı 4.21. *Çözümün varlığı için $f(x,y)$ fonksiyonun sürekliliği yeterli bir koşulken teklik için yeterli değildir.*

Örnek 4.22.

$$y = 0 \text{ ve } y = \frac{1}{27}(x-2)^3$$

fonksşyonları $y\prime = \sqrt[3]{y^2}$ denkleminin integral eğrisidir.

Teorem 4.23.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{4.13}$$

diferansiyel denklemini ve $P(a, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ noktasını ele alalım.

$$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y\prime}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

fonksiyonları sürekli olsun. Bu durumda P noktasının bir komşuluğunda (4.13) denklemini ve

$$g(a) = b_1,\ g\prime(a) = b_2, \ldots, g^{(n-1)}(x) = b_n \tag{4.14}$$

koşulunu sağlayan $y = g(x)$ tek çözümü mevcuttur.

Uyarı 4.24. *Lipschitz koşulunu kullanarak (4.13) denklemi için Teorem 4.19'ye benzer bir teorem formüle etmek mümkündür.*

Teorem 4.23 lokal karakterlidir. Yani

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y\prime + a_0(x)\, y = b(x) \tag{4.15}$$

denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği I aralığında mevcuttur.

Uyarı 4.25. *(4.13) denklemi için (4.14) koşulları sağlansın. $(n+1)$ boyutlu $P(a, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ noktası verilsin. Q bölgesi P noktasını içeren bölge ve (4.13) denkleminin bu noktada Teorem 4.23'e göre tek bir çözümü olsun. Buna göre aşağıda bu tarz denklemler için genel çözüm kavramını tanımlayacağız.*

Tanım 4.26. *(4.13) denkleminin çözümü n tane bağımsız keyfi sabit içeriyorsa bu çözüme Q bölgesinde (4.13) denkleminin genel çözümü (integrali) denir.*

Uyarı 4.27. *Eğer sabitlerden herhangi birisini, diğerleriyle yer değiştirmek mümkün değil ise bu durumda bu sabitlere bağımsız denir. Yani hiç biri gereksiz değil ise.*

Örnek 4.28.

$$y = c_1 \exp 2x + c_2 \exp(-x)$$

fonksiyonu

$$y\prime\prime - y\prime - 2y = 0$$

denkleminin genel çözümüdür.

$$c_1 \exp(x + c_2)$$

fonksiyonu

$$y\prime\prime - y = 0$$

denkleminin genel çözümü değildir. Çünkü

$$c_1 \exp(x + c_2) = c_1 \exp(x) \exp(c_2) = K \exp x$$

olarak yazabiliriz.

Uyarı 4.29. *Genel durumda*

$$F\left(x, y, y\prime, y\prime\prime, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{4.16}$$

denklemi için genel integralden bahsetmek çok mümkün değildir. Çünkü çözümün tekliği sorusunun öncelikle cevaplanması gerekmektedir. Örneğin

$$y\prime^2 - x^4 y^2 = 0 \tag{4.17}$$

denklemi aşağıdaki değerler için sağlanır:

$$y\prime = x^2 y, \;\; y\prime = -x^2 y$$

Eğer belli bir bölgeden ve ya başlangıç koşullarından bahsediyorsak, (*4.16*) *denkleminin genel çözümünden bahsetmek mümkündür.*

Tanım 4.30. *Eğer her noktada çözümün tekliği koşulu sağlanmıyorsa bu durumda* $y\prime = f(x, y)$ *denkleminin çözümüne tekil çözüm (integral) denir.*

Örnek 4.31. $y = 0$ *integral eğrisi*

$$y\prime = \sqrt[3]{y^2}$$

ADD nin tekil çözümüdür çünkü $(2, 0)$ *noktası boyunca*

$$y = \frac{1}{27}(x - 2)^3$$

fonksiyonu da diğer bir integral eğrisidir.

Uyarı 4.32. $y\prime = f(x, y)$ *denklemi bir parametreli genel çözüme sahiptir. Eğer çözüm mevcut ise verilen denklemin tekil integraline eşittir.*

Uyarı 4.33. $f(x, y) \neq 0$ *için*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x, y)} \tag{4.18}$$

denklemi ile

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y) \tag{4.19}$$

denklemi denktir. $f(x, y) = 0$ *durumunda* (*4.18*) *denklemi tanımsız iken* (*4.19*) *denklemi tanımlıdır. Böylece genelde* (*4.18*) *denklemine* (*4.19*) *denklemini ekleriz ve* (*4.18*) *denkleminin integral eğrisi ile hem* (*4.19*) *denkleminin hem de* (*4.18*) *denkleminin integral eğrilerinin düşüneceğiz.*

Örnek 4.34.

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{4.20}$$

çemberi

$$y\prime = -\frac{x}{y}$$

$(-2, 0), (2, 0)$ *noktalarında bile ADD nin integral eğrisidir. Çünkü bu noktalarda* (*4.20*) *fonksiyonu*

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$$

ADD yi sağlar.

CHAPTER 2

Birinci mertebeden ADD

5. $y\prime = f(x)$ formundaki denklemler

$f(x)$ verilen I aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$y\prime = f(x)$$

ADD nin genel çözümü

$$y = \int f(x)\,dx$$

şeklindedir ve belirsiz integral keyfi sabiti içerir.

$$y(x_0) = y_0$$

başlangıç koşulu verildiğinde çözüm

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

şeklindedir.

Örnek 5.1.

$$y' = 3x^2$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$y = \int 3x^2 dx \Rightarrow y = x^3 + c$$

□

Örnek 5.2.

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 \\ y(3) &= 27 \end{aligned}$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$y = \int 3x^2 dx \Rightarrow y = x^3 + c \Rightarrow 27 = 27 + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = x^3$$

□

Örnek 5.3.

$$y'' = \sin x$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$y' = \int \sin x dx \Rightarrow y' = -\cos x + c_1 \Rightarrow y = -\int (\cos x + c_1)\,dx \Rightarrow y = -\sin x + c_1 x + c_2$$

□

Örnek 5.4.

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2-6x+1 \\ y(-2) &= 0 \end{aligned}$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$y=\int\left(3x^2-6x+1\right)dx \Rightarrow y=x^3-3x^2+x+c \Rightarrow 0=-8-12+c \Rightarrow c=20 \Rightarrow y=x^3-3x^2+x+20$$

□

Örnek 5.5.

$$\begin{aligned} y''' &= \exp(-x) \\ y(0) &= -1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=3 \end{aligned}$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} y'' &= \int \exp(-x)\,dx \Rightarrow y''=-\exp(-x)+c_1 \Rightarrow y'=\int(-\exp(-x)+c_1)\,dx \Rightarrow y'=\exp(-x)+c_1x+c_2 \Rightarrow \\ y &= \int(\exp(-x)+c_1x+c_2)\,dx \Rightarrow y=-\exp(-x)+c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3 \Rightarrow \begin{array}{l} -1=-1+c_3 \\ 1=1+c_2 \\ 3=-1+c_1 \end{array} \Rightarrow \\ y &= -\exp(-x)+2x^2 \end{aligned}$$

□

6. $y\prime=f(y)$ formundaki denklemler

$f(y)\neq 0$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere (Bkz. Uyarı 4.33)

$$y\prime=f(y)$$

ADD ni

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)}$$

olarak yazabiliriz. Buna göre genel çözüm

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}$$

dir ve eğri (x_0,y_0) noktasından geçiyorsa çözüm

$$x-x_0=\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{f(t)}$$

formundadır. Eğer $f(y_0)=0$ ise çözüm

$$y=y_0$$

şeklindedir.

Örnek 6.1.

$$y\prime=y^2,\ y\neq 0$$

ya da

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y^2}$$

ADD nin çözümü

$$x=\frac{-1}{y}+c$$

ya da

$$y=\frac{1}{c-x}$$

dir. Eğer çözüm $(3,1)$ *noktasından geçiyorsa çözüm*

$$y=\frac{1}{4-x}.$$

Eğer çözüm $(3,0)$ *noktasından geçiyorsa çözüm*

$$y=0$$

dır çünkü

$$y\prime=0\Rightarrow y=c$$

ve başlangıç koşullarından $y=0$ *elde ederiz.*

Örnek 6.2.

$$y'+\frac{1}{5}y=\frac{3}{5}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.
Çözüm

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{5}(-3+y)\Rightarrow\int\frac{dy}{y-3}=-\int\frac{1}{5}dx\Rightarrow \\ \ln|y-3| &= -\frac{1}{5}x+\ln c\Rightarrow y-3=c\exp\left(-\frac{1}{5}x\right) \end{aligned}$$

□

Örnek 6.3.

$$y'=2\sqrt{y-1}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.
Çözüm

$$\begin{aligned} y' &= 2\sqrt{y-1}\Rightarrow\int\frac{dy}{2\sqrt{y-1}}=\int dx\Rightarrow \\ \sqrt{y-1} &= x+c\Rightarrow y=1+(x+c)^2 \end{aligned}$$

□

7. Değişkenlerine ayrılabilen ADD

Teorem 7.1. $f(x)$, $[a,b]$ *aralığında sürekli,* $g(y)$, $[c,d]$ *aralığında sürekli fonksiyonlar ve* $g(y)\neq 0$ *olsun.*

$$y\prime=\frac{f(x)}{g(y)}$$

ADD nin çözümü

$$\int f(x)\,dx=\int g(y)\,dy$$

formundadır. Eğer çözüm (x_0,y_0) *noktasından geçiyorsa*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{y_0}^{y} g(y)\,dy$$

Uyarı 7.2.

$$y\prime=f(x)\,g(y)$$

denklemi içinde benzer teorem geçerlidir. Çözüm

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{g(y)}dy$$

şeklindedir ve çözüm (x_0,y_0) *noktasından geçiyorsa*

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx=\int_{y_0}^{y}\frac{1}{g(y)}dy$$

dir. Eğer $g(y_0) =$ ise çözüm

$$y = y_0$$

dır.

Örnek 7.3.

$$\begin{aligned} y\prime &= xy^3 \sin x \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm Değişkenlere ayırma yöntemini kullanırsak

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x \sin x dx$$

elde ederiz. Bu durumda genel çözüm

$$\frac{1}{2}\frac{1}{y^2} = x\cos x - \sin x + c$$

ve $y(0) = 1$ koşulundan $c = 1/2$ elde edilir. Böylece çözüm

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x\cos x - 2\sin x + 1}}.$$

$y(0) = +1$ koşulundan dolayı pozitif kök alınmıştır. □
Aynı denklemin $y(0) = 0$ başlangıç koşullu çözümü $y = 0$ dır.

Örnek 7.4.

$$y\prime = -\frac{y}{x-3}, \quad x \neq 3$$

denklemini çözünüz.

Çözüm Denklemi

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x-3}dy$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} \ln y &= -\ln(x-3) + \ln c \\ y(x-3) &= c \end{aligned}$$

□

Örnek 7.5.

$$(3x+8)\left(y^2+4\right)dx - 4y\left(x^2+5x+6\right)dy = 0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm Denklemi

$$\frac{(3x+8)}{(x^2+5x+6)}dx - \frac{4y}{(y^2+4)}dy = 0$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{(3x+8)}{(x+2)(x+3)}dx - 2\frac{2y}{(y^2+4)}dy &= 0 \\ \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx - 2\frac{2y}{y^2+4}dy &= 0 \end{aligned}$$

denkleminin çözümü

$$\begin{aligned}
\ln(x+2)^2+\ln(x+3)-\ln\left(y^2+4\right)^2 &= \ln c \\
\ln\left[\frac{(x+2)^2(x+3)}{\left(y^2+4\right)^2}\right] &= \ln c \\
\frac{(x+2)^2(x+3)}{\left(y^2+4\right)^2} &= c \\
(x+2)^2(x+3) &= c\left(y^2+4\right)^2
\end{aligned}$$

□

Örnek 7.6.

$$x(y+1)^2dx+\left(x^2+1\right)ye^ydy=0$$

denklemini çözünüz.

Çözüm Denklemi

$$\frac{x}{(x^2+1)}dx+\frac{ye^y}{(y+1)^2}dy=0$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int\frac{x}{(x^2+1)}dx+\int\frac{ye^y}{(y+1)^2}dy &= 0 \\
\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\int\frac{(y+1)e^y}{(y+1)^2}dy-\int\frac{e^y}{(y+1)^2}dy \quad \underset{e^y=u}{=} & \quad c \Rightarrow \\
\frac{dy}{(y+1)^2}=dv\Rightarrow v=-\frac{1}{(y+1)} & \\
\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\int\frac{e^y}{(y+1)}dy-\left(-\frac{e^y}{(y+1)}+\int\frac{e^y}{(y+1)}dy\right) &= c\Rightarrow
\end{aligned}$$

denkleminin çözümü

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{e^y}{(y+1)}=c$$

□

Örnek 7.7.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y(1-x^2)^{1/2}}$$

denklemini çözünüz.

Çözüm Denklemi

$$ydy-\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}dx=0$$

şeklinde yazabiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned}
\int ydy-\int\frac{x}{(1-x^2)^{1/2}}dx &= 0 \\
\frac{1}{2}y^2+\left(1-x^2\right)^{1/2} &= c\Rightarrow
\end{aligned}$$

denkleminin çözümü

$$\frac{1}{2}y^2+\left(1-x^2\right)^{1/2}=c$$

□

8. Homojen ADD

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

formunda yazılabilen fonksiyonlara n. dereceden homojen fonksiyonlar denir. Sağ taraf fonksiyonu 0. dereceden homojen olan

$$y\prime = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{8.1}$$

formundaki ADD lere homojen denklemler denir.

Uyarı 8.1. *Verilen bir ADD in homojen olup olmadığını anlamak için*

$$f(tx,ty)=f(x,y)$$

bağıntısının sağlanması gerekmektedir.

Örnek 8.2.

$$\begin{aligned} y\prime &= \ln x-\ln y+\frac{x+y}{x-y} \Rightarrow f(x,y)=\ln x-\ln y+\frac{x+y}{x-y} \\ f(tx,ty) &= \ln\frac{tx}{ty}+\frac{tx+ty}{tx-ty}=f(x,y) \end{aligned}$$

olduğundan ADD homojendir.

Örnek 8.3.

$$\begin{aligned} y\prime &= \frac{y^3+2xy}{x^2} \Rightarrow f(x,y)=\frac{y^3+2xy}{x^2} \\ f(tx,ty) &= \frac{t^3y^3+2t^2xy}{t^2x^2}=\frac{ty^3+2xy}{x^2}\neq f(x,y) \end{aligned}$$

olduğundan ADD homojen değildir.

Çözüm için (8.1) denklemi yerine

$$z(x)=\frac{y(x)}{x} \text{ ya da } y(x)=xz(x) \tag{8.2}$$

bağıntısı olan $z(x)$ fonksiyonunu bulmaya çalışalım. 2. bağıntıyı kullanırsak

$$y\prime = z+xz\prime \tag{8.3}$$

elde ederiz. Bunu (8.1) denkleminde kullanırsak

$$z+xz\prime = f(z)$$

veya

$$z\prime = \frac{f(z)-z}{x} \tag{8.4}$$

ADD yi elde ederiz. Bu denklem değişkenlerine ayrılabilir ADD elde ederiz.

Örnek 8.4. $y'=e^{y/x}+\frac{y}{x}$ *ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm $u=y/x\Rightarrow y=xu\Rightarrow y'=u+xu'$ ifadesini denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u+xu' &= e^u+u\Rightarrow e^{-u}u'=x\Rightarrow \\ \frac{e^{-u}du}{dx} &= \frac{1}{x}\Rightarrow \int e^{-u}du=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow \\ -e^{-u} &= \ln x-\ln c\Rightarrow e^{-u}=\ln\frac{c}{x}\Rightarrow \\ -u &= \ln\ln\frac{c}{x}\Rightarrow u=-\ln\ln\frac{c}{x} \end{aligned}$$

□

Örnek 8.5. $(\sqrt{y+x}+\sqrt{y-x})\,dx-(\sqrt{y+x}-\sqrt{y-x})\,dy=0$ *ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm Denklem homojen ADD dir. $u = y/x \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$ ifadesini denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\sqrt{y+x}+\sqrt{y-x}}{\sqrt{y+x}-\sqrt{y-x}} \\
u+xu' &= \frac{\sqrt{xu+x}+\sqrt{xu-x}}{\sqrt{xu+x}-\sqrt{xu-x}} \Rightarrow \\
u+xu' &= \frac{\sqrt{u+1}+\sqrt{u-1}}{\sqrt{u+1}-\sqrt{u-1}} \Rightarrow \\
u+xu' &= \frac{\left(\sqrt{u+1}+\sqrt{u-1}\right)^2}{u+1-(u-1)} \Rightarrow \\
&= \frac{u+1+u-1+2\sqrt{u^2-1}}{2} = u+\sqrt{u^2-1} \Rightarrow \\
xu' &= \sqrt{u^2-1} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{dx}{x} \underset{(32).int}{\Rightarrow} \\
\ln|u+\sqrt{u^2-1}| &= \ln x + \ln c \Rightarrow u+\sqrt{u^2-1} = cx \underset{u=y/x}{\Rightarrow} \\
\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1} &= cx
\end{aligned}$$

□

Örnek 8.6. $\left(3x^2+9xy+5y^2\right)dx - \left(6x^2+4xy\right)dy = 0, y(2) = -6$ *BDP nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm Denklem homojen ADD dir. $u = y/x \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$ ifadesini denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{3x^2+9xy+5y^2}{6x^2+4xy} \\
u+xu' &= \frac{3x^2+9ux^2+5u^2x^2}{6x^2+4ux^2} \Rightarrow \\
u+xu' &= \frac{3+9u+5u^2}{6+4u} \Rightarrow xu' = \frac{3+9u+5u^2-6u-4u^2}{6+4u} \\
xu' &= \frac{3u+u^2+3}{4u+6} \Rightarrow \int \frac{4u+6}{3u+u^2+3}du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\
2\ln|3u+u^2+3| &= \ln x + \ln c \Rightarrow \left(3u+u^2+3\right)^2 = cx \underset{u=y/x}{\Rightarrow} \\
\left(3\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2+3\right)^2 &= cx \Rightarrow y(2) = -6 \Rightarrow (-9+9+3)^2 = 2c \Rightarrow c = \frac{9}{2} \Rightarrow \\
\left(3u+u^2+3\right)^2 &= \frac{9}{2}x
\end{aligned}$$

□

9. $y\prime = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ formundaki ADD

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9.1}$$

olmak üzere

$$y\prime = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \tag{9.2}$$

ADD nin çözümü için

$$x = X+h,\ \ y = Y+k \tag{9.3}$$

değişken değiştirmesi yapılır. Bunu (9.2) denkleminde yazalım:

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2h+b_2k+c_2}\right) \tag{9.4}$$

diferansiyel denkleminde

$$\begin{aligned} a_1h+b_1k+c_1 &= 0 \\ a_2h+b_2k+c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{9.5}$$

olacak şekilde seçersek

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) \tag{9.6}$$

denklemini elde ederiz ki bu denklem homojen denklemdir ve homojen denklemler için geçerli olan çözüm yöntemi kullanılır.
Eğer (9.1) determinantı sıfır ise yani $a_2x+b_2y=k\left(a_1x+b_1y\right)$ ise (9.2) denklemi kolayca çözülür.

$$z=a_1x+b_1y\Rightarrow a_2x+b_2y=kz$$

yazarak

$$z\prime=a_1+b_1y\prime\Rightarrow y\prime=\frac{z\prime-a_1}{b_1}$$

ifadelerini (9.2) denkleminde yazarsak

$$\frac{z\prime}{b_1}=\frac{a_1}{b_1}+f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right)\Rightarrow\frac{dz}{a_1+b_1f\left(\frac{z+c_1}{kz+c_2}\right)}=dx$$

değişkenlerine ayrılabilen ADD elde ederiz.

Örnek 9.1.

$$y\prime=\frac{2x-y+9}{x-3y+2}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.
Çözüm

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\neq 0$$

olduğundan (9.5) denkleminin çözersek $h=-5,\ k=-1$ buluruz. $x=X-5,\ y=Y-1$ yazdığımızda ve denklemde yerine yazdığımızda

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y}{X-3Y}$$

homojen denklemini elde ederiz.

$$z=\frac{Y}{X},\ Y=zX$$

dönüşümünü denklemde yazarsak

$$X\frac{dz}{dX}+z=\frac{2-z}{1-3z}\text{ ya da }X\frac{dz}{dX}=\frac{2-2z+3z^2}{1-3z}$$

değişkenlerine ayrılabilir ADD ni elde ederiz. Buna göre çözüm

$$\begin{aligned} \int\frac{1-3z}{2-2z+3z^2}dz &= \int\frac{dX}{X}\Rightarrow \\ -\frac{1}{2}\ln\left(2-2z+3z^2\right) &= \ln\left(X\right)+\ln c\Rightarrow \\ \ln\left(2-2z+3z^2\right) &= -2\ln\left(cX\right)=\ln\frac{1}{c^2X^2}=\ln\frac{c_1}{X^2},\ c_1=\frac{1}{c^2} \\ 2-2z+3z^2 &= \frac{c_1}{X^2}, \end{aligned}$$

$z=\frac{Y}{X}$ geri dönüşümünü ve $X=x+5,\ Y=y+1$ geri dönüşümünü yaparsak

$$2X^2-2XY+3Y^2=c_1$$

ya da

$$2(x+5)^2 - 2(x+5)(y+1) + 3(y+1)^2 = c_1$$

çözümünü elde ederiz. □

Örnek 9.2.

$$(2x+3y+1)\,dx + (4x+6y+1)\,dy = 0$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y+1}{4x+6y+1}$$

ve

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

olduğundan $z = 2x+3y \Rightarrow 4x+6y = 2z$ dönüşümünü kullanarak $z' = 2+3y' \Rightarrow y' = (z'-2)/3$ elde ederiz. Bunları denklemde kullandığımızda

$$\begin{aligned} \frac{z'-2}{3} &= -\frac{z+1}{2z+1} \\ z' &= -\frac{3(z+1)}{2z+1} + 2 \\ z' &= \frac{z-1}{2z+1} \end{aligned}$$

değişkenlerine ayrılabilen ADD elde ederiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{2z+1}{z-1}dz &= \int dx \\ \int \left(2 + \frac{3}{z-1}\right) dz &= \int dx \\ 2z + 3\ln(z-1) &= x + c \end{aligned}$$

çözümünü elde ederiz. $z = 2x+3y$ dönüşümünü tekrar kullandığımızda

$$2(2x+3y) + 3\ln(2x+3y-1) = x + c$$

çözümünü elde ederiz. □

10. Lineer ADD

$$y' + a(x)\,y = b(x) \tag{10.1}$$

formundaki denklemlere lineer denklemler denir.

$$y' + a(x)\,y = 0 \tag{10.2}$$

denklemine de (10.1) denklemine karşılık gelen homojen lineer denklem denir.
Homojen terimi "homojen ADD" ile karıştırlılmamalıdır. Buna rağmen literatürde bu terim kullanılmaktadır. $a(x), b(x)$ I aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. Uyarı 4.24'i kullanarak (10.1) ve (10.2) ADD nin tek çözümünden bahsedebiliriz. Öncelikle (10.2) denklemi değişkenlerine ayrılabilen ADD'dir ve çözüm

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= -\int a(x)\,dx \\ \ln(Cy) &= -\int a(x)\,dx,\ Cy > 0 \\ Cy &= \exp\left(-\int a(x)\,dx\right), \\ y &= c\exp\left(-\int a(x)\,dx\right),\ C = 1/c \end{aligned} \tag{10.3}$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi (10.1) denkleminin genel çözümünü elde edelim. Çözümü "parametrelerin değişimi" olarak adlandırılan yöntemi kullanarak bulalım. (10.1) in genel çözümünü (10.3) formu şeklinde arayalım. Fakat burada c, x'in bir fonksiyonu olsun,

$$y = c(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right). \tag{10.4}$$

(10.4) denklemini diferansiyellersek

$$y = c\prime(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) - c(x)\,a(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) \tag{10.5}$$

ifadesini elde ederiz. (10.4) ve (10.5) özdeşliklerini (10.1) denkleminde kullanırsak

$$\begin{aligned} c\prime(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) - c(x)\,a(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) + a(x)\,c(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) &= b(x) \\ c\prime(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right) &= b(x) \end{aligned}$$

ifadesinden

$$c\prime(x) = \exp\left(\int a(x)\,dx\right) b(x)$$

elde ederiz ki değişkenlerine ayrılabilen ADD dir. Buna göre (10.1) denklemindeki $c(x)$ fonksiyonu

$$c(x) = \int b(x)\exp\left(\int a(x)\,dx\right)dx + c_1$$

şeklindedir. Son olarak bu fonksiyonu (10.4)de yazarsak çözümü

$$y = e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)\,e^{\left(\int a(x)dx\right)}dx + c_1\right) \tag{10.6}$$

şeklinde elde ederiz.

Örnek 10.1.

$$y\prime + 2xy = x^3 \tag{10.7}$$

ADD denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm (10.1) denklemine göre $a(x) = 2x,\ b(x) = x^3$ dir. Buna göre (10.6) formuna göre

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 2xdx}\left(\int x^3 e^{\left(\int 2xdx\right)}dx + c_1\right) \\ y &= e^{-x^2}\left(\int x^3 e^{x^2}dx + c_1\right) \\ y &= e^{-x^2}\left(\int x^2 x e^{x^2}dx + c_1\right), \\ & \left[\begin{array}{c} x^2 = u,\ xe^{x^2}dx = dv \\ \Rightarrow 2xdx = du, v = \frac{1}{2}e^{x^2} \end{array}\right] \\ y &= e^{-x^2}\left(\left(\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx\right) + c_1\right) \\ y &= e^{-x^2}\left(\left(\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2}\right) + c_1\right) \\ y &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) + c_1 e^{-x^2} \end{aligned} \tag{10.8}$$

ve (10.7)denkleminin çözümü (10.8) şeklindedir. □

Uyarı 10.2. *(10.1) denklemi* $y_0 = 0$ *başlangıç koşulunu sağlasa bile (10.6) çözümü tektir. Örneğin (10.7)denkleminin çözümü* $(0,0)$ *noktasından geçiyorsa (10.8) a göre çözüm*

$$y = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) + \frac{1}{2}e^{-x^2}$$

dir.

Uyarı 10.3. *Parametrelerin değişimi yöntemi yerine (10.1) denkleminin çözümünü*

$$y(x) = u(x)\,v(x) \tag{10.9}$$

olarak arayalım. Bu ifadeyi (10.1) denkleminde yerine yazdığımızda

$$u\prime v + uv\prime + auv = b \tag{10.10}$$

şeklinde elde ederiz. Şimdi $u(x)$ fonksiyonunun

$$u\prime + au = 0 \tag{10.11}$$

lineer homojen ADD i sağladığını varsayalım, yani (10.11) denkleminin çözümü

$$u = e^{-\int a(x)dx}$$

dir. (10.10) denklemini

$$(u\prime + au)\,v + uv\prime = b$$

olarak yazıp (10.11) i kullanırsak

$$uv\prime = b$$

ya da

$$v = \int b(x)\,e^{\int a(x)dx} + c \tag{10.12}$$

olarak elde ederiz. Çözümün (10.9) ifadesini kullanırsak daha önceki (10.6) formunu elde ederiz.

Örnek 10.4.

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right) y = e^{-2x}$$

ADD denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm (10.1) denklemine göre $a(x) = \frac{2x+1}{x}$, $b(x) = \exp(-2x)$ dir. Buna göre (10.6) formuna göre

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int \frac{2x+1}{x}dx}\left(\int \exp(-2x)\,e^{\left(\int \frac{2x+1}{x}dx\right)}dx + c_1\right)\\
y &= \frac{e^{-2x}}{x}\left(\int \exp(-2x)\exp(2x)\,xdx + c_1\right)\\
y &= \frac{e^{-2x}}{x}\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right),\\
y &= \frac{xe^{-2x}}{2} + c_1\frac{e^{-2x}}{x} \qquad (10.13)
\end{aligned}$$

: ve denkleminin çözümü

$$y = \frac{xe^{-2x}}{2} + c_1\frac{e^{-2x}}{x}$$

şeklindedir. □

Örnek 10.5.

$$\begin{aligned}
\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} + 4xy &= x\\
y(2) &= 1.
\end{aligned}$$

ADD denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm (10.1) denklemine göre $a\left(x\right)=\frac{4x}{\left(x^{2}+1\right)},\ b\left(x\right)=\frac{x}{\left(x^{2}+1\right)}$ dir. Buna göre (10.6) formuna göre

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int\frac{4x}{\left(x^{2}+1\right)}dx}\left(\int\frac{x}{\left(x^{2}+1\right)}e^{\left(\int\frac{4x}{\left(x^{2}+1\right)}dx\right)}dx+c_{1}\right)\\
y &= \left(x^{2}+1\right)^{-2}\left(\int\frac{x}{\left(x^{2}+1\right)}\left(x^{2}+1\right)^{2}dx+c_{1}\right)\\
y &= \left(x^{2}+1\right)^{-2}\left(\frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{2}}{2}+c_{1}\right),\\
y(2) &= 1\rightarrow 1=\left(5\right)^{-2}\left(\frac{16}{4}+\frac{4}{2}+c_{1}\right)\rightarrow c_{1}=19 \qquad (10.14)
\end{aligned}$$

ve denkleminin çözümü

$$y=\left(x^{2}+1\right)^{-2}\left(\frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{2}}{2}+19\right)$$

şeklindedir. □

11. Bernoulli denklemi

$$y\prime+a(x)y=b(x)y^{n} \qquad (11.1)$$

formundaki ADD lere Bernoulli ADD denir.
$a\left(x\right),b\left(x\right)$ I aralığında sürekli fonksiyonlar olsun. $n=0$ ya da $n=1$ durumu için sırasıyla (10.1) ve (10.2) lineer ADD yi elde ederiz. Burada n sayısının 0 ve 1 den farklı durumlarını ele alacağız. (11.1) denklemini y^{n} ye böldüğümüzde

$$\frac{y\prime}{y^{n}}+\frac{a(x)}{y^{n-1}}=b(x) \qquad (11.2)$$

denklemini elde ederiz.

$$z=\frac{1}{y^{n-1}}=y^{-n+1}$$

dönüşümünü kullandığımızda

$$z\prime=\left(-n+1\right)y^{-n}y\prime\Rightarrow\frac{y\prime}{y^{n}}=\frac{z\prime}{\left(-n+1\right)}$$

buluruz. Bu ifadeleri (11.2) denkleminde yazarsak

$$\frac{z\prime}{\left(-n+1\right)}+a(x)z=b(x) \qquad (11.3)$$

lineer denklemini (Bkz. (10.1)) ve çözümü (10.6) olarak elde ederiz.

Örnek 11.1.

$$y\prime+xy=xy^{3} \qquad (11.4)$$

ADD çözümü bulunuz.
Çözüm (11.4) denklemini (11.1) ile karşılaştırırsak

$$a\left(x\right)=x,\ b\left(x\right)=x,\ n=3$$

elde ederiz. Bunu (11.3) da yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}
\frac{z\prime}{-2}+xz &= x\Rightarrow\\
\frac{z\prime}{\left(z-1\right)} &= 2x\Rightarrow\\
\frac{dz}{\left(z-1\right)} &= 2xdx\Rightarrow\\
\ln\left(z-1\right) &= x^{2}+c
\end{aligned}$$

ve $z = y^{-2}$ dönüşümünden

$$\ln\left(\frac{1-y^2}{y^2}\right) = x^2 + c$$

(11.4) denkleminin çözümüdür. □

Örnek 11.2.

$$x\frac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$$

ADD çözümü bulunuz.

Çözüm denklemi xy^4 ya bölelim:

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} + x^{-1}y^{-3} = -2x^5$$

elde ederiz.

$$z = y^{-3} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

Bunu denklemde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}
\frac{z\prime}{-3} + \frac{1}{x}z &= -2x^5 \overset{\text{hom}\,ojen\text{ denklem için}}{\Rightarrow} \frac{dz}{z} = 3\frac{dx}{x} \Rightarrow \\
z &= cx^3 \Rightarrow z = c(x)\,x^3 \\
&\Rightarrow c'x^3 + 3x^2c(x) - \frac{3}{x}c(x)\,x^3 = 6x^5 \\
&\Rightarrow c' = 6x^2 \Rightarrow c(x) = 2x^3 + c_1 \\
&\Rightarrow z = \left(2x^3 + c_1\right)x^3 \Rightarrow y = z^{-1/3} = \frac{\left(2x^3+c_1\right)^{-1/3}}{x}
\end{aligned}$$

ve

$$y = \frac{\left(2x^3+c_1\right)^{-1/3}}{x}$$

denkleminin çözümüdür. □

Örnek 11.3.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} &= xy^{-3} \\
y(1) &= 2
\end{aligned}$$

ADD çözümü bulunuz.

Çözüm denklemi y^{-3} ya bölelim:

$$y^3\frac{dy}{dx} + \frac{y^4}{2x} = x$$

elde ederiz.

$$z = y^4 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

Bunu denklemde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}
\frac{z\prime}{4} + \frac{1}{2x}z &= x \overset{\text{hom}\,ojen\text{ denklem için}}{\Rightarrow} \frac{dz}{z} = -2\frac{dx}{x} \Rightarrow \\
z &= cx^{-2} \Rightarrow z = c(x)\,x^{-2} \\
&\Rightarrow c'x^{-2} - 2x^{-3}c(x) + \frac{2}{x}c(x)\,x^{-2} = 4x \\
&\Rightarrow c' = 4x^3 \Rightarrow c(x) = x^4 + c_1 \\
&\Rightarrow z = x^2 + c_1x^{-2} \Rightarrow y = z^{1/4} = \left(x^2 + c_1x^{-2}\right)^{1/4} \\
&\Rightarrow 2 = (1 + c_1)^{1/4} \Rightarrow c_1 = 15
\end{aligned}$$

ve

$$y^4 = x^2 + 15x^{-2}$$

denkleminin çözümüdür. □

12. Riccati Denklemi

$$y\prime = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x) \tag{12.1}$$

forundaki denklemlere Riccati denklemleri denir. $a(x) = 0$ durumunda (12.1) denklemi lineer denklemdir ve $c(x) = 0$ durumunda (12.1) denklemi Bernoulli denklemidir.
Genel olarak Riccati denklemini analitik olarak çözmek mümkün değildir. Eğer (12.1) denkleminin bir çözümü biliniyorsa genel çözümü elde etmek mümkündür: $y_1(x)$ (12.1) denkleminin bir çözümü olsun, yani

$$y_1' = a(x)\,y_1^2 + b(x)\,y_1 + c(x) \tag{12.2}$$

yazılır.

$$y = y_1 + z \tag{12.3}$$

ile yeni ibr z fonksiyonu tanımlayalım. (12.3) ifadesini (12.1) denkleminde kullanırsak

$$\begin{aligned} y_1' + z\prime &= a(x)\,(y_1+z)^2 + b(x)\,(y_1+z) + c(x) \\ y_1' + z\prime &= a(x)\,y_1^2 + 2a(x)\,y_1 z + a(x)\,z^2 + b(x)\,y_1 + b(x)\,z + c(x) \end{aligned}$$

(12.2) den faydalanırsak

$$z\prime = (2a(x)\,y_1 + b(x))\,z + a(x)\,z^2 \tag{12.4}$$

Bernouilli denklemini elde ederiz.

Örnek 12.1.

$$xy\prime - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x \tag{12.5}$$

ADD için bir özel çözüm $y_1 = Ax + B$ olmak üzere genel çözümünü bulunuz.

Çözüm Özel çözüm $y_1 = Ax + B$ (12.5) da yerine yazarsak

$$xA - 3Ax - 3B + A^2x^2 + 2ABx + B^2 = 4x^2 - 4x$$

ifadesinden

$$A = 2,\ B = 0$$

elde ederiz. Böylece denklemin bir özel çözümü

$$y_1 = 2x$$

dir. (12.1) denklemine göre (12.5) da

$$a(x) = -\frac{1}{x}, b(x) = \frac{3}{x}, c(x) = 4x - 4$$

(12.3) dönüşümü ile

$$y = 2x + z$$

(12.4) denklemi

$$z\prime = \left(-4 + \frac{3}{x}\right) z - \frac{1}{x} z^2$$

Bernoulli denklemine dönüşür. (11.1) Bernoulli denkleminin ifadesine göre

$$a(x) = 4 - \frac{3}{x},\ b(x) = -\frac{1}{x},\ n = 2$$

dir. Buna göre

$$u = \frac{1}{z}$$

dönüşümünden

$$-u\prime + \left(4 - \frac{3}{x}\right) u = -\frac{1}{x}$$

lineer ADD elde ederiz. Tekrar (10.1) lineer denklemin formuna göre

$$a(x) = \frac{3}{x} - 4, b(x) = \frac{1}{x}$$

ve çözümün (10.6) formuna göre

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-\int\left(\frac{3}{x}-4\right)dx}\left(\int \frac{1}{x}e^{\int\left(\frac{3}{x}-4\right)dx}dx + c_1\right) \\
&= e^{-3\ln x+4x}\left(\int \frac{1}{x}e^{3\ln x-4x}dx + c_1\right) \\
&= e^{\ln x^{-3}+4x}\left(\int \frac{1}{x}e^{\ln x^{3}-4x}dx + c_1\right) \\
&= x^{-3}e^{4x}\left(\int \frac{1}{x}x^3e^{-4x}dx + c_1\right) \\
&= x^{-3}e^{4x}\left(\int x^2e^{-4x}dx + c_1\right) \\
& \quad (integral\ tablo\ (50)) \\
&= x^{-3}e^{4x}\left(\frac{x^2}{-4}-\frac{2x}{16}+\frac{2}{64}\right)e^{-4x} + c_1x^{-3}e^{4x} \\
&= x^{-3}\left(\frac{x^2}{-4}-\frac{2x}{16}+\frac{2}{64}\right) + c_1x^{-3}e^{4x}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$z = \frac{1}{u}$$

ters dönüşümü ve

$$y = 2x + z$$

dönüşümü ile (12.5) ADD nin çözümünü elde etmiş oluruz. □

12.1. Riccati denkleminin özel durumları.

12.1.1. *A..*

$$y\prime = ay^2 + by + c$$

türündeki denklemler. Burada a, b, c sabitlerdir. Denklem Bölüm 6 ve 7 teki yöntemler kullanılarak çözülür.

12.1.2. *B..*

$$y\prime = ay^2 + \frac{b}{x^2}$$

türündeki denklemler. Burada a, b keyfi sabitlerdir.

$$y = \frac{1}{z}$$

dönüşümü ile

$$y\prime = -\frac{z\prime}{z^2}$$

bulunur. Bu ifadeleri denklemde yerine yazdığımızda

$$-\frac{z\prime}{z^2} = \frac{a}{z^2} + \frac{b}{x^2}$$

ve

$$z\prime = -a - b\left(\frac{z}{x}\right)^2$$

homojen denklemi elde edilir ve Bölüm 8 teki yöntem ile çözüm elde edilir.

13. Tam ADD

Uyarı 13.1. *$y\prime = \varphi(x,y)$ denklemi*

$$y\prime + \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = 0 \qquad (13.1)$$

formundadır. Burada f, g fonksiyonları ve onların 1. mertebeden türevleri O bölgesinde sürekli fonksiyonlar ve $g(x,y) \neq 0$ dır. Teorem 4.12 ve Uyarı 4.16 ye göre çözümün varlığı ve tekliği mevcuttur. (13.1) denklemini

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)dy = 0 \qquad (13.2)$$

formunda yazabiliriz.

Teorem 13.2. *(13.2) denkleminin sol tarafı $F(x,y)$ fonksiyonunun tam diferansiyeli olsun. Eğer*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \qquad (13.3)$$

koşulu sağlanıyorsa (13.2) denklemine tamdır denir. Eğer O bölgesi basit bağlantılı bölge ise (13.2) denklemi veya (13.1) denkleminin genel çözümü

$$F(x,y) = c \qquad (13.4)$$

fonksiyonudur.

Buna göre çözüm aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x,y)$$

ifadesinde integral aldığımızda

$$F(x,y) = \int f(x,y)\,dx + \varphi(y) \qquad (13.5)$$

elde ederiz. Burada tekrar y ye göre türev aldığımızda

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)\,dx + \varphi\prime(y) = g(x,y) \Rightarrow \\ \varphi\prime(y) &= g(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)\,dx \end{aligned}$$

elde ederiz. Burada son denklemin sağ tarafı denklemin tam olmasından dolayı x değişkeninden bağımsızdır ve denklemin çözümü

$$\varphi(y) = \int \left(g(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int f(x,y)\,dx \right) dy$$

şeklindedir. Bunu (13.4) çözümünde yerine yazdığımızda (13.2) denklemi veya (13.1) denkleminin genel çözümünü elde ederiz.

Örnek 13.3.

$$\left(x^2 - y^2\right) dx + \left(y^3 - 2xy\right) dy = 0$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\frac{\partial\left(x^2 - y^2\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(y^3 - 2xy\right)}{\partial x} = -2y \qquad (13.6)$$

olduğundan (13.3) koşulu sağlanır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \\
F(x,y) &= \int \left(x^2 - y^2\right) dx + \varphi(y) \Rightarrow \\
F(x,y) &= \frac{x^3}{3} - xy^2 + \varphi(y) \Rightarrow \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= g(x,y) \Rightarrow -2xy + \varphi\prime(y) = y^2 - 2xy \Rightarrow \\
\varphi\prime(y) &= y^2 \Rightarrow \varphi(y) = \frac{y^3}{3} + c
\end{aligned} \tag{13.7}$$

son $\varphi(y)$ ifadesini (13.7) denkleminde yerine yazarsak (13.6) denkleminin genel çözümünü

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy^2 + \frac{y^3}{3} + c$$

şeklinde elde ederiz. □

Örnek 13.4.

$$\begin{aligned}
\left(2x\cos y + 3x^2 y\right) dx + \left(x^3 - x^2 \sin y - y\right) dy &= 0 \\
y(0) &= 2
\end{aligned}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\frac{\partial\left(2x\cos y + 3x^2y\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^3 - x^2\sin y - y\right)}{\partial x} = 3x^2 - 2x\sin y$$

olduğundan (13.3) koşulu sağlanır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= f(x,y) = 2x\cos y + 3x^2 y \Rightarrow \\
F(x,y) &= \int \left(2x\cos y + 3x^2y\right) dx + \varphi(y) \Rightarrow \\
F(x,y) &= x^2\cos y + x^3 y + \varphi(y) \Rightarrow \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= g(x,y) \Rightarrow -x^2\sin y + x^3 + \varphi\prime(y) = x^3 - x^2\sin y - y \Rightarrow \\
\varphi\prime(y) &= -y \Rightarrow \varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + c
\end{aligned} \tag{13.8}$$

son $\varphi(y)$ ifadesini denkleminde yerine yazarsak genel çözümü

$$F(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} + c$$

şeklinde elde ederiz. Son olarak başlangıç koşulundan,

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{4}{2} + c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \\
x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} &= -2
\end{aligned}$$

çözümdür. □

Örnek 13.5.

$$\left(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\sin 2x + 2x\right) dx + \left(xe^{xy}\cos 2x - 3\right) dy = 0$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\frac{\partial\left(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x\right)}{\partial y}=\frac{\partial\left(xe^{xy}\cos 2x-3\right)}{\partial x}=e^{xy}\left(\cos 2x-2x\sin 2x+xy\cos 2x\right)$$

olduğundan (13.3) koşulu sağlanır.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= f(x,y)=ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= g(x,y)=xe^{xy}\cos 2x-3\Rightarrow\\
F(x,y) &= \int\left(xe^{xy}\cos 2x-3\right)dy+\varphi(x)\Rightarrow\\
F(x,y) &= (\cos 2x)\,e^{xy}-3y+\varphi(x)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left((\cos 2x)\,e^{xy}-3y\right)\\
\frac{\partial F}{\partial x} &= ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x\\
&\Rightarrow y(\cos 2x)\,e^{xy}-2(\sin 2x)\,e^{xy}+\varphi\prime(x)=ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x\Rightarrow\\
\varphi\prime(x) &= 2x\Rightarrow\varphi(x)=x^2+c
\end{aligned}$$

son $\varphi(x)$ ifadesini denkleminde yerine yazarsak genel çözümü

$$F(x,y)=(\cos 2x)\,e^{xy}-3y+x^2+c$$

şeklinde elde ederiz. □

14. İntegrasyon Çarpanı

Eğer (13.2) denklemi tam diferansiyel denklem değil ise yukarıdaki yöntem uygulanamaz. Böyle bir durumda (13.2) denklemini tam ADD yapacak şekilde sıfırdan farklı bir fonksiyon ile çarpmalıyız. Yani,

$$m(x,y)\,f(x,y)\,dx+m(x,y)\,g(x,y)\,dy=0 \tag{14.1}$$

denklemi tam ADD olacak şekilde $m(x,y)\neq 0$ fonksiyonu bulmalıyız.

Tanım 14.1. *Eğer (13.2) denklemi tam diferansiyel denklem değil fakat (14.1) denklemi tam diferansiyel denklem ise $m(x,y)$ fonksiyonuna (13.2) denkleminin integrasyon çarpanı (integration factor) denir.*

Örnek 14.2.

$$\left(3y+4xy^2\right)dx+\left(2x+3x^2y\right)dy=0$$

ADD tam değildir. Çünkü

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 3y+4xy^2,\;\; g(x,y)=2x+3x^2y\Rightarrow\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3+8xy,\;\;\frac{\partial g}{\partial x}=2+6xy\Rightarrow\\
\frac{\partial f}{\partial y} &\neq \frac{\partial g}{\partial x}
\end{aligned}$$

fakat $m(x,y)=x^2y$ için

$$\left(3x^2y^2+4x^3y^3\right)dx+\left(2x^3y+3x^4y^2\right)dy=0$$

denklemi

$$\frac{\partial(mf)}{\partial y}=6x^2+12x^3y^2=\frac{\partial(mg)}{\partial x}$$

koşulunu sağladığından tamdır. Bu durumda $m(x,y)=x^2y$ integrasyon çarpanıdır.

Uyarı 14.3. *Eğer $m(x,y)$ fonksiyonu integrasyon çarpanı ise yani (14.1) denklemi tam diferansiyel denklem ise*

$$\frac{\partial(mf)}{\partial y}=\frac{\partial(mg)}{\partial x}$$

koşulu sağlanır. Buradan

$$g(x,y)\frac{\partial m}{\partial x}-f(x,y)\frac{\partial m}{\partial y}=\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)m \tag{14.2}$$

elde ederiz.

Genelde integrasyon çarpanını bulmak oldukça zordur. Bu yüzden (14.2) ifadesini kullanarak $m(x,y)$ integrasyon çarpanı sadece x ve sadece y nin fonksiyonu olduğu özel durumlarda inceleyeceğiz.

14.1. I.Durum. $m(x,y)$ integrasyon çarpanı sadece x in bir fonksiyonu olsun. Bu durumda (14.2) ifadesinde $\frac{\partial m}{\partial y}=0$ dır ve (14.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
g(x,y)\frac{\partial m}{\partial x} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)m \Rightarrow \\
\frac{dm}{m} &= \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{g(x,y)}dx \Rightarrow \qquad (14.3)\\
\ln m &= \int \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{g(x,y)}dx \Rightarrow \\
m(x) &= \exp\left(\int \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{g(x,y)}dx\right) \qquad (14.4)
\end{aligned}$$

Uyarı 14.4. *(14.3) denkleminde dx in katsayısı x in bir fonksiyonu olmalıdır.*

14.2. II.Durum. $m(x,y)$ integrasyon çarpanı sadece y in bir fonksiyonu olsun. Bu durumda (14.2) ifadesinde $\frac{\partial m}{\partial x}=0$ dır ve (14.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
-f(x,y)\frac{\partial m}{\partial y} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)m \Rightarrow \\
\frac{dm}{m} &= -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{f(x,y)}dy \Rightarrow \qquad (14.5)\\
\ln m &= \int -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{f(x,y)}dy \Rightarrow \\
m(x) &= \exp\left(\int -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{f(x,y)}dy\right) \qquad (14.6)
\end{aligned}$$

Uyarı 14.5. *(14.5) denkleminde dy in katsayısı y in bir fonksiyonu olmalıdır.*

Örnek 14.6.

$$(x-y)\,dx-dy=0$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x-y)\,,\ g(x,y)=-1 \Rightarrow \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -1,\ \frac{\partial g}{\partial x}=0 \Rightarrow \\
\frac{\partial f}{\partial y} &\neq \frac{\partial g}{\partial x}
\end{aligned}$$

olduğundan denklem tam ADD değildir. Buna göre integrasyon çarpanını bulalım. Önce $m(x,y)$ integrasyon çarpanı sadece x in bir fonksiyonu olma durumunu inceleyelim:

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{g(x,y)}=1$$

ve sadece x in bir fonksiyonudur. (14.4) çözümünden integrasyon çarpanı

$$m(x) = \exp\left(\int \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)}{g(x,y)} dx\right) = \exp\left(\int dx\right) = e^x$$

olarak bulunur. Buna göre

$$e^x (x-y)\, dx - e^x dy = 0 \tag{14.7}$$

denklemi tam ADD dir:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^x (x-y),\ g(x,y) = -e^x \Rightarrow \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -e^x,\ \frac{\partial g}{\partial x} = -e^x \Rightarrow \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned}$$

ve çözümü

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= f(x,y) = e^x (x-y) \Rightarrow \\ F(x,y) &= \int (e^x (x-y))\, dx + \varphi(y) \Rightarrow (49) \text{ ve } (51) \text{ nolu formüllerden} \\ F(x,y) &= e^x (x-1) - ye^x + \varphi(y) \Rightarrow \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= g(x,y) \Rightarrow -e^x + \varphi\prime(y) = -e^x \Rightarrow \\ \varphi\prime(y) &= 0 \Rightarrow \varphi(y) = c \end{aligned} \tag{14.8}$$

son $\varphi(y)$ ifadesini (14.8) denkleminde yerine yazarsak (14.7) denkleminin genel çözümünü

$$\begin{aligned} F(x,y) &= e^x (x-1) - ye^x + c \Rightarrow \\ F(x,y) &= e^x (x-y-1) + c \end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. □

Örnek 14.7.

$$ydx + (3+3x-y)\, dy = 0$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y,\ g(x,y) = (3+3x-y) \Rightarrow \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 1,\ \frac{\partial g}{\partial x} = 3 \Rightarrow \\ \frac{\partial f}{\partial y} &\neq \frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned}$$

olduğundan denklem tam ADD değildir. Buna göre integrasyon çarpanını bulalım. Önce $m(x,y)$ integrasyon çarpanı sadece x in bir fonksiyonu olma durumunu inceleyelim:

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)}{g(x,y)} = \frac{-2}{(3+3x-y)}$$

sadece x in bir fonksiyonu değildir. Buna göre $m(x,y)$ integrasyon çarpanı sadece y in bir fonksiyonu olma durumunu inceleyelim:

$$-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)}{f(x,y)} = \frac{2}{y}$$

sadece y in bir fonksiyonudur. (14.6) çözümünden integrasyon çarpanı

$$m(y)=\exp\left(\int-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{f(x,y)}dy\right)=\exp\left(\int\frac{2}{y}dy\right)=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2$$

olarak bulunur. Buna göre

$$y^3dx+y^2(3+3x-y)\,dy=0 \tag{14.9}$$

denklemi tam ADD dir:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y^3,\ g(x,y)=y^2(3+3x-y)\Rightarrow\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2,\ \frac{\partial g}{\partial x}=3y^2\Rightarrow\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x}
\end{aligned}$$

ve çözümü

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= f(x,y)=y^3\Rightarrow\\
F(x,y) &= \int y^3dx+\varphi(y)\Rightarrow(1)\ \text{nolu formülden}\\
F(x,y) &= xy^3+\varphi(y)\Rightarrow \qquad (14.10)\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= g(x,y)\Rightarrow 3xy^2+\varphi\prime(y)=y^2(3+3x-y)\Rightarrow\\
\varphi\prime(y) &= y^2(3-y)\Rightarrow\varphi(y)=\int y^2(3-y)\,dy+c\Rightarrow(1)\ \text{nolu formülden}\\
\varphi(y) &= y^3-\frac{y^4}{4}+c
\end{aligned}$$

son $\varphi(y)$ ifadesini (14.10) denkleminde yerine yazarsak (14.9) denkleminin genel çözümünü

$$F(x,y)=xy^3+y^3-\frac{y^4}{4}+c$$

şeklinde elde ederiz. □

Örnek 14.8. $(3x^2+y+3x^3y)\,dx+xdy=0$ *ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm $f(x,y)=3x^2+y+3x^3y,\ g(x,y)=x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial(3x^2+y+3x^3y)}{\partial y}=3x^3+1,\\
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial(x)}{\partial x}=1\Rightarrow\\
\frac{\partial f}{\partial y} &\neq \frac{\partial g}{\partial x}\Rightarrow
\end{aligned}$$

olduğundan tam ADD değildir. (14.2) formülüne göre

$$\begin{aligned}
g(x,y)\frac{\partial m}{\partial x}-f(x,y)\frac{\partial m}{\partial y} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x}\right)m\Rightarrow\\
\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial x} &= 3x^3+1-1=3x^3\Rightarrow\\
\frac{\partial m}{\partial y} &= 0,\ x\frac{\partial m}{\partial x}=3x^3m\Rightarrow\\
\int\frac{dm}{m} &= \int 3x^2dx\Rightarrow\\
\ln m &= x^3\Rightarrow\\
m &= e^{x^3}
\end{aligned}$$

integral çarpanıdır. Buna göre

$$\left(3x^2+y+3x^3y\right)e^{x^3}dx+xe^{x^3}dy=0$$

denklemi tam ADD dir. $f(x,y)=\left(3x^2+y+3x^3y\right)e^{x^3}$, $g(x,y)=xe^{x^3}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial\left(\left(3x^2+y+3x^3y\right)e^{x^3}\right)}{\partial y}=e^{x^3}+3x^3e^{x^3}, \\
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial\left(xe^{x^3}\right)}{\partial x}=e^{x^3}+3x^3e^{x^3}\Rightarrow \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x}\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= g(x,y)=xe^{x^3}\Rightarrow \\
F(x,y) &= \int\left(xe^{x^3}\right)dy \\
&= xye^{x^3}+\varphi(x)\Rightarrow \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial\left(xye^{x^3}+\varphi(x)\right)}{\partial x} \\
&= ye^{x^3}+3x^3ye^{x^3}+\varphi'(x) \\
&= f(x,y)=\left(3x^2+y+3x^3y\right)e^{x^3}\Rightarrow \\
ye^{x^3}+3x^3ye^{x^3}+\varphi'(x) &= \left(3x^2+y+3x^3y\right)e^{x^3} \\
\varphi'(x) &= 3x^2e^{x^3}\Rightarrow\varphi(x)=\int\left(3x^2e^{x^3}\right)dx \\
\varphi(x) &= e^{x^3}+c\Rightarrow \\
F(x,y) &= xye^{x^3}+\varphi(x)\Rightarrow \\
F(x,y) &= xye^{x^3}+e^{x^3}+c=0
\end{aligned}$$

çözümdür.

Örnek 14.9. *$(2xy^2+y)dx+(2y^3-x)dy=0$ ADD nin çözümünü bulunuz.*

□

Çözüm $f(x,y)=2xy^2+y$, $g(x,y)=2y^3-x$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial\left(2xy^2+y\right)}{\partial y}=4xy+1, \\
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial\left(2y^3-x\right)}{\partial x}=-1\Rightarrow \\
\frac{\partial f}{\partial y} &\neq \frac{\partial g}{\partial x}\Rightarrow
\end{aligned}$$

olduğundan tam ADD değildir. (14.2) formülüne göre

$$\begin{aligned}
g(x,y)\frac{\partial m}{\partial x} - f(x,y)\frac{\partial m}{\partial y} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) m \Rightarrow \\
\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} &= 4xy + 2 \Rightarrow \\
\frac{\partial m}{\partial x} &= 0,\ -(2xy^2 + y)\frac{\partial m}{\partial y} = (4xy+2)\, m \Rightarrow \\
\int \frac{dm}{m} &= -\int \frac{2}{y} dy \Rightarrow \\
\ln m &= -2\ln y \Rightarrow \\
m &= y^{-2}
\end{aligned}$$

integral çarpanıdır. Buna göre

$$(2xy^2 + y)y^{-2}dx + (2y^3 - x)y^{-2}dy = 0$$

denklemi tam ADD dir. $f(x,y) = (2xy^2 + y)y^{-2},\ g(x,y) = (2y^3 - x)y^{-2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial\left((2xy^2 + y)y^{-2}\right)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}, \\
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial\left((2y^3 - x)y^{-2}\right)}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial x} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} &= g(x,y) = (2y^3 - x)y^{-2} \Rightarrow \\
F(x,y) &= \int \left((2y^3 - x)y^{-2}\right) dy \\
&= y^2 + \frac{x}{y} + \varphi(x) \Rightarrow \\
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial\left(y^2 + \frac{x}{y} + \varphi(x)\right)}{\partial x} \\
&= \frac{1}{y} + \varphi'(x) \\
&= f(x,y) = (2xy^2 + y)y^{-2} \Rightarrow \\
\frac{1}{y} + \varphi'(x) &= (2xy^2 + y)y^{-2} \\
\varphi'(x) &= 2x \Rightarrow \varphi(x) = \int (2x)\, dx \\
\varphi(x) &= x^2 + c \Rightarrow \\
F(x,y) &= y^2 + \frac{x}{y} + \varphi(x) \Rightarrow \\
F(x,y) &= y^2 + \frac{x}{y} + x^2 + c = 0
\end{aligned}$$

çözümdür. □

14.3. (13.1) denkleminin tekil noktası. Eğer $f, g, \partial f/\partial y, \partial g/\partial y$ fonksiyonları (x_0, y_0) noktası komşuluğunda sürekli fonksiyonlar ve $g(x_0, y_0) \neq 0$ ise Teorem 4.19'ye göre tek çözüm söz konusudur ve eğer $g(x_0, y_0) = 0$ fakat $f(x_0, y_0) \neq 0$ ise (13.1) denklemini Uyarı 4.33 ya göre

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{g(x,y)}{f(x,y)} \tag{14.11}$$

şeklinde yazabiliriz ve aynı koşullar altında çözümün varlığından söz edebiliriz.

Tanım 14.10. *Eğer*

$$g(x_0, y_0) = 0, \ f(x_0, y_0) = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (x_0, y_0) *noktasına (13.1) denkleminin tekil noktası denir.*

Tekl nokta için çözümün varlığı değişik olasılıklar taşımaktadır. Bunlar ile ilgili bazı örnekler verelim.

Örnek 14.11.

$$y\prime = \frac{y}{x}$$

denklemi için $(0,0)$ *noktası tekil noktadır. Değişkenlerine ayrılabilir ADD olduğundan çözüm kolayca*

$$y = cx$$

olarak elde edilir ve çözümde $(0,0)$ *noktasından geçmektedir.*

Tanım 14.12. *Eğer ADD in çözümü tekil noktadan geçerse bu tekil noktaya düğüm noktası denir. Örnek 14.11 de* $(0,0)$ *noktası bir düğüm (node) noktasıdır.*

Örnek 14.13.

$$y\prime = -\frac{y}{x}$$

denklemi için $(0,0)$ *noktası tekil noktadır. Değişkenlerine ayrılabilir ADD olduğundan çözüm kolayca*

$$y = \frac{c}{x}$$

olarak elde edilir ve çözümde $(0,0)$ *noktasından geçmemektedir. Fakat*

$$y = 0, \ x = 0$$

çözümün asimptotlarıdır.

Tanım 14.14. *Eğer ADD in tekil noktasındaki çözümü asimptotları ise bu tekil noktaya semer (saddle) noktası denir. Örnek 14.13 de* $(0,0)$ *noktası bir semer noktasıdır.*

Örnek 14.15.

$$y\prime = -\frac{x}{y}$$

denklemi için $(0,0)$ *noktası tekil noktadır. Değişkenlerine ayrılabilir ADD olduğundan çözüm kolayca*

$$x^2 + y^2 = c$$

olarak elde edilir. Çözümde $(0,0)$ *noktasından geçmemektedir. ve*

$$y = 0, \ x = 0$$

çözümün asimptotları değildir.

Tanım 14.16. *Eğer ADD in tekil noktasındaki çözümü asimptotları değil ise ve çözüm tekil noktadan geçmiyorsa bu tekil noktaya merkez (center) noktası denir. Örnek 14.15 de* $(0,0)$ *noktası bir merkez noktasıdır.*

CHAPTER 3

Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

15. Dik Yörüngeler

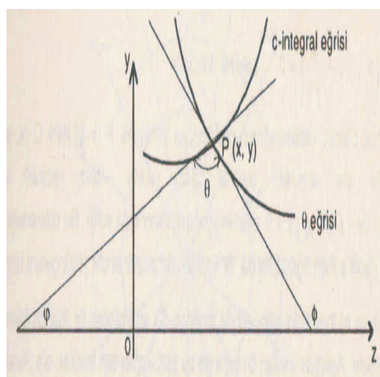
xy • düzlemi içinde bir D bölgesinde tarif edilmiş bulunan bir eğri ailesi

$$f(x,y,c)=0 \tag{15.1}$$

denklemi ile ifade edilir. Burada c bir parametredir ve c nin her değeri yeni bir eğriyi tarif eder. Bu eğriler birlikte bir eğri ailesi oluşturur.

Tanım 15.1. *Bir eğri ailesinin eğrilerinin herbirini aynı bir θ açısı ile kesen bir eğrisine θ - yörüngesi denir. θ • açısı $90°$ olursa bu yörüngeye dik yörünge denir.*

Verilen bir eğri altesinin θ - yörüngesini bulmak için bu ailenin $f(x,y,y\prime)=0$ diferansiyel denkleminden yararlanılır.



Şekil 1

$$y\prime=\tan\varphi=\tan(\phi-\theta)=\frac{\widetilde{y}\prime-\tan\theta}{1+\widetilde{y}\prime\tan\theta}$$

ifadesinden θ - yörünge eğrisinin diferansiyel denklemi

$$f\left(x,y,\frac{\widetilde{y}\prime-\tan\theta}{1+\widetilde{y}\prime\tan\theta}\right)=0 \tag{15.2}$$

olarak elde edilir. Özel olarak dik yörünge durumu için

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{\widetilde{y}\prime-\tan\theta}{1+\widetilde{y}\prime\tan\theta}=\frac{-1}{y\prime}$$

elde edilir. Buna göre (15.2) ifadesinden

$$f\left(x,y,\frac{-1}{y\prime}\right)=0$$

şekline dönüşür.

Uyarı 15.2. *Verilen eğrinin diferansiyel denklemi*

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{15.3}$$

şeklinde ele alınırsa, burada dy/dx yerine $-dx/dy$ yazmak suretiyle, dik yörünge eğrisinin diferansiyel denklemi

$$Q(x,y)dx - P(x,y)dy = 0 \tag{15.4}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem ile ifade edilen eğri ailesi de, ilk verilen eğri ailesinin dik yörüngesini oluşturur.

Örnek 15.3.

$$x^2 + y^2 = c^2, \ c > 0 \tag{15.5}$$

eği ailesi, aynı O merkezli ve c yarıçaplı dairelerdir. Bu eğrilere dik olan eğri ailesini bulunuz.

Çözüm (15.5) ifadesinde diferansiyel alırsak

$$2xdx + 2ydy = 0 \tag{15.6}$$

ADD elde ederiz. (15.3) e göre

$$P(x,y) = 2x, \ Q(x,y) = 2y$$

ve (15.4) e göre (15.5) eğri ailesine dik eğri ailesi

$$2ydx - 2xdy = 0 \tag{15.7}$$

olarak elde ederiz. ADD in çözümü

$$2ydx - 2xdy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow y = mx$$

ile ifade eilen doğru aileleridir. □

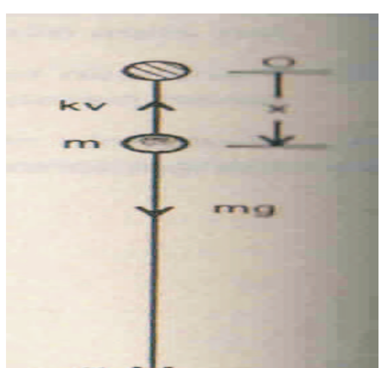
16. Mekanik problemleri

Bilindiği gibi Newton'un ikinci hareket kanunu,

$$\begin{aligned} F &= ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ m &= \frac{w}{g} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Burada m cismin kütlesi, F cisme etki eden sabit kuvvet, a cismin hareketinin İvmesi, v hız ve gidilen yol x , w ise cismin ağırlığı ile ifade edilir.

Örnek 16.1. *Kütlesi m olan bir cismin yerden oldukça yüksekte bulunan bir noktadan İlk hızsız olarak serbest düşmeye bırakılıyor. Cisme etki eden yerçekim kuvveti sabit ve hava direncinin cismin hızı île orantılı olduğu kabul edildiğine göre. herhangi bir t anında cismin başlangıç noktasından hangi uzaklıkla olduğunu ve o anda hangi hızla hareket etmekte olduğunu bulunuz.*



Şekil 4

Çözüm Şekil 4 'te görüldüğü gibi, pozitif x-ekseni boyunca aşağı doğru düşmekte olan cisim bir t anında O başlangıç noktasından x kadar uzakta ve bir v hızı İle hareket etmekte olsun, k pozitif bir katsayı olmak üzere, cisim v hızı ile aşağı doğru hareket etmekte İken cismin hareketine engel olmaya çalışan hava direnme kuvveti cismin hızı İle orantılıdır ve kv 'ye eşittir. Cisme etki eden yerçekim kuvveti de mg olduğuna göre, t anında cisme etki eden toplam kuvvet $mg - kv$ olur. O zaman, Newton 'un ikinci hareket kanununa göre

$$\Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = mg - kv \underset{\text{değişkenlerine ayrılan}}{\Rightarrow} \frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m} \Rightarrow \frac{-kdv}{mg - kv} = \frac{-kdt}{m}$$
$$\Rightarrow \quad \ln(mg - kv) = -k\frac{t}{m} + \ln c \Rightarrow mg - kv = ce^{-k\frac{t}{m}}$$

elde edilir. $t = 0$ anında cismin hızı (ilk hız) "sıfır" okluğundan $v(0) = 0$

$$mg = c$$

olarak bulunur. Buna göre genel çözüm

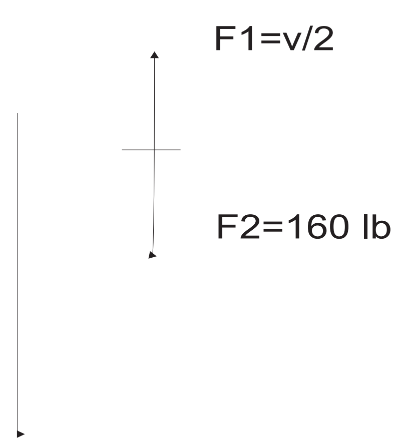
$$v = \frac{gm}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow dx = \left(\frac{gm}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt \Rightarrow \\
\int dx &= \int\left(\frac{gm}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt \Rightarrow x = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + c \Rightarrow \\
x(0) &= h \Rightarrow h = \frac{m^2g}{k^2} + c \Rightarrow c = h - \frac{m^2g}{k^2} \Rightarrow \\
x &= \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + h - \frac{m^2g}{k^2}
\end{aligned}$$

□

Örnek 16.2. *Üzerindeki donanımları ile birlikte bir paraşütçünün ağırlığı 160 lb (libre) verilmiştir. Paraşüt açılmadan önce hava direnci hızın yarısına eşittir. Paraşüt 5 sn sonra açıldığında hava direnci hızın karesinin 5/8'i kadar oluyor. Paraşüt açılmadan ve açıldıktan sonra paraşütçünün hızını bulunuz. (Yerçekimi ivmesini* $g = 32\ fit/sn^2$ *olarak alınız.)*



Çözüm Paraşüt açılmadan önceki hızını bulalım.

$$w = 160\ lb \Rightarrow m = \frac{w}{g} = 160/32 = 5$$

dır. Newton'un 2.kuramından

$$\begin{aligned} F &= m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = 160 - \frac{v}{2} \Rightarrow 5\frac{dv}{dt} = 160 - \frac{v}{2} \Rightarrow \\ 5\frac{dv}{dt} &= \frac{320-v}{2} \Rightarrow \frac{dv}{320-v} = \frac{dt}{10} \Rightarrow -\ln(320-v) = \frac{1}{10}t - \ln c \Rightarrow \\ 320 - v &= ce^{-\frac{1}{10}t} \Rightarrow v(t) = 320 - ce^{-\frac{1}{10}t} \end{aligned}$$

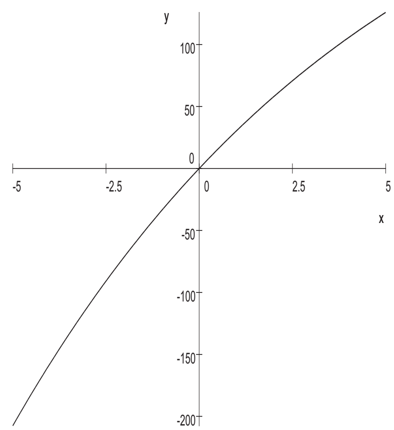
olarak buluruz. Paraşütçünün ilk zamanda hızının olmamasından

$$v(0) = 0$$

koşulundan

$$\begin{aligned} 0 &= 320 - c \Rightarrow c = 320 \Rightarrow \\ v(t) &= 320\left(1 - e^{-\frac{1}{10}t}\right) \end{aligned}$$

paraşüt açılmadan önceki paraşütçünün hızını vermektedir. 5 sn. sonraki hızı



$$v(5) = 320\left(1 - e^{-\frac{1}{10}5}\right)$$

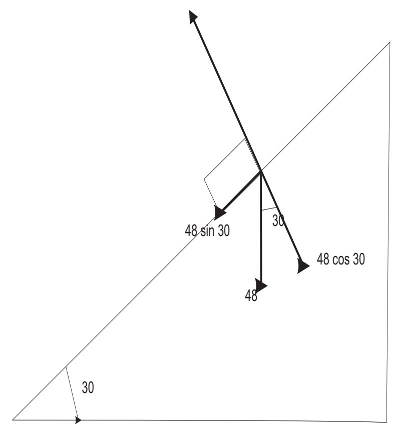
olarak buluruz. Buna göre 5 sn sonraki diferansiyel denklemi

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= 160 - \frac{5v^2}{8} \\ v(5) &= 320\left(1 - e^{-\frac{1}{10}5}\right) = 125.91 \end{aligned}$$

: olarak verebiliriz. Denklemin çözümü

$$\begin{aligned} \frac{dv}{16^2 - v^2} &= \frac{dt}{8} \Rightarrow \frac{1}{32}\left(\frac{1}{16-v} + \frac{1}{16+v}\right)dv = \frac{dt}{8} \Rightarrow \\ \ln\frac{16+v}{16-v} &= 4t + \ln c \Rightarrow \frac{16+v}{16-v} = ce^{4t} \Rightarrow v\left(1 + ce^{4t}\right) = 16\left(ce^{4t} - 1\right) \Rightarrow \\ v &= \frac{16\left(ce^{4t} - 1\right)}{\left(1 + ce^{4t}\right)} \Rightarrow v(5) = 320\left(1 - e^{-\frac{1}{10}5}\right) \Rightarrow \\ 320\left(1 - e^{-\frac{1}{10}5}\right) &= \frac{16\left(ce^{20} - 1\right)}{\left(1 + ce^{20}\right)} \Rightarrow c = \frac{336 - 320e^{-\frac{1}{2}}}{320e^{\frac{39}{2}} - 304e^{20}} \approx \frac{110}{142}e^{20} \Rightarrow \\ v(t) &= \frac{16\left(\frac{110}{142}e^{20+4t} - 1\right)}{\left(1 + \frac{110}{142}e^{20+4t}\right)},\ t \geq 5 \end{aligned}$$

olarak bulunur. □



Örnek 16.3. *Ağırlığı 48 lb olan bir cisim yatayla 30° olan eğik bir düzlemin en üstünden bırakılıyor. Hava direnci, hızın yarısına ve sürtünme katsayısı da 0.25 olarak verildiğine göre, cisim bırakıldıktan 2sn sonraki hızını ve toplam yol 24 ft(fit) olduğuna göre cisim alt kısma vardığında cismin hızı nedir (g=32 ft/sec²)?*

Çözüm Formulasyon: □

(1) Ağırlığı 48 lb, dikey olarak belirtilen kuvvettir.
(2) N notmal kuvveti, yatay düzleme dik olan yöndedir.

Şimdi ise toplam kuvvetleri belirleyelim:

(1) F_1, ağırlığın yatay bileşeni ile verilen kuvvettir

$$F_1 = 48 \sin 30^\circ = 24$$

(2) F_2, sürtünme kuvveti, ağırlığın dikey bileşeni ile sürtünme kuvvetinin çarpımıdır:

$$F_2 = \mu N = -\frac{1}{4} 48 \cos 30^\circ = -6\sqrt{3}$$

(3) F_3, hava direnci $\frac{v}{2}$ ve $v > 0$ olduğundan negatif yöndedir

$$F_3 = -\frac{v}{2}$$

Şimdi Newtonun kuralı

$$\begin{aligned} F &= ma = F_1 + F_2 + F_3, \\ m &= \frac{w}{g} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} \Rightarrow \\ m\frac{dv}{dt} &= 24 - 6\sqrt{3} - \frac{v}{2} \\ v(0) &= 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemini çözelim:

$$\begin{aligned} -\frac{dv}{48 - 12\sqrt{3} - v} &= -\frac{dt}{3} \Rightarrow \\ \ln\left(48 - 12\sqrt{3} - v\right) &= -\frac{t}{3} + \ln c \Rightarrow \\ 48 - 12\sqrt{3} - v &= ce^{-\frac{t}{3}} \Rightarrow v(0) = 0 \Rightarrow \\ 48 - 12\sqrt{3} &= c \Rightarrow \\ v &= \left(48 - 12\sqrt{3}\right)\left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right) \Rightarrow \\ v(2) &= \left(48 - 12\sqrt{3}\right)\left(1 - e^{-\frac{2}{3}}\right) \simeq 13.2(ft/\sec^2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi yolun 24 olması durumunda son noktadaki hızının ne olduğu sorusuna gelelim:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v = \left(48-12\sqrt{3}\right)\left(1-e^{-\frac{t}{3}}\right) \Rightarrow \\
x &= \left(48-12\sqrt{3}\right)\left(t+3e^{-\frac{t}{3}}\right)+c_2 \Rightarrow x(0)=0 \Rightarrow \\
c_2 &= -3\left(48-12\sqrt{3}\right) \Rightarrow \\
x &= \left(48-12\sqrt{3}\right)\left(t+3e^{-\frac{t}{3}}-3\right) \Rightarrow \\
24 &= \left(48-12\sqrt{3}\right)\left(t+3e^{-\frac{t}{3}}-3\right) \Rightarrow \\
3e^{-\frac{t}{3}} &= \frac{47+2\sqrt{3}}{13}-t
\end{aligned}$$

denkleminin yaklaşık çözümü 2.6 dır.

$$v=\left(48-12\sqrt{3}\right)\left(1-e^{-\frac{2.6}{3}}\right) \simeq 16.2 ft/\sec$$

17. Oran Problemleri

Oran problemleri, bir fiziksel büyüklükteki, birim zaman içinde meydana gelen değişme olarak tarif edilir.

Örnek 17.1. *Radyoaktif bir elementin bozunma hızı elementin mevcut miktarı ile doğru orantılıdır. Rayoaktif elementin orjinal ağırlığının yarısı 1500 yıl içinde dağıldığına göre*

(1) 4500 yıl sonra, radyoaktif elementin ağırlığını bulunuz.
(2) Orjinal ağırlığının %10 una varması için ne kadar zaman geçmesi gerektiğini bulunuz.

Çözüm x radyoaktif elementin miktarını göstermek üzere dx/dt radyokatif bozulmanın oranın belirtir. Bu oran mevcut miktar ile doğru orantılı olduğundan

$$\frac{dx}{dt}=-kx$$

miktarda alama olduğundan işaret negatifdir.

$$x(0)=x_0$$

ve 1500 yıl sonraki bozulma miktarı

$$x(1500)=\frac{x_0}{2}$$

dir.

$$\frac{dx}{dt}=-kx, x(0)=x_0$$

diferansiyel denkleminin çözümü

$$x=x_0e^{-kt} \Rightarrow x(1500)=\frac{x_0}{2}$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned}
\frac{x_0}{2} &= x_0e^{-1500k} \Rightarrow k=\frac{\ln 2}{1500} \approx 0.00046 \Rightarrow x=x_0e^{-0.00046t} \Rightarrow \\
e^{-k} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{1/1500} \Rightarrow x=x_0\left(e^{-k}\right)^t=x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1500}
\end{aligned}$$

□

(1) $t=4500$ için bozunma

$$x=x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{4500/1500}=\frac{x_0}{8}$$

Bu ise 4500 sene sonunda bozunmanın 1/8 veya %12.5 olduğunu söyler

(2)

$$x=\frac{x_0}{10} \Rightarrow \frac{x_0}{10}=x_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/1500} \Rightarrow t=1500\frac{\ln 10}{\ln 2} \approx 4985$$

yıl sonra gerçekleşir.

Örnek 17.2. *Newton'un soğuma kuramına göre, soğuyan bir cisimin sıcaklığı, cismin sıcaklığı ve cismi kaplayan ortamın sabit sıcaklığının farkı ile orantılıdır. $t = 0$ daki $50°$ sabit sıcaklıklı bir ortamdaki sıcaklığı $80°$ olduğuna göre ve 5 saniye sonra cismin sıcaklığı $70°$ 'e düştüğüne göre cismin sıcaklığının, t ye bağlı fonksiyonunu bulunuz ve 10 sn sonraki sıcaklığını bulunuz.*

Çözüm x,t zamandaki cismin sıcaklığını göstersin buna göre diferansiyel denklem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k(x-50) \\ x(0) &= 80 \end{aligned}$$

ve

$$x(5) = 70$$

koşullarımız vardır.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x-50} &= kdt \Rightarrow \ln(x-50) = kt + \ln c \Rightarrow x - 50 = ce^{kt} \Rightarrow x = 50 + ce^{kt} \Rightarrow x(0) = 80 \Rightarrow \\ 30 &= c \Rightarrow x = 50 + 30e^{kt} \Rightarrow 70 = 50 + 30e^{5k} \Rightarrow e^{5k} = \frac{2}{3} \Rightarrow k \approx -0.08109 \Rightarrow e^k = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/5} \Rightarrow \\ x &= 50 + 30\left(\frac{2}{3}\right)^{t/5} \end{aligned}$$

10 sn sonraki cismin sıcaklığı

$$x = 50 + 30\left(\frac{2}{3}\right)^{10/5} = 63.33°$$

□

18. Popülasyon Problemleri

Populasyon için diferansiyel model

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

olarak düşünülürken realistik model

$$\frac{dx}{dt} = kx - \lambda x^2$$

şeklindedir.

Örnek 18.1. *Populasyon için realistik model*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}x - \frac{1}{10^8}x^2$$

olarak veriliyor. 1980 yılında şehrin popülasyonu 100000 olarak verildiğine göre 2000 yılındaki şehrin popülasyonu nedir? Hangi yılda, 1980 deki popülasyonunun 2 katı kadar popülasyon olur?

Çözüm

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{100}x - \frac{1}{10^8}x^2 \Rightarrow \frac{dx}{10^{-2}x - 10^{-8}x^2} = dt \Rightarrow 100\left(\frac{1}{x} + \frac{10^{-6}}{1-10^{-6}x}\right)dx = dt \Rightarrow \\ \ln x - \ln\left(1 - 10^{-6}x\right) &= \frac{t}{100} + \ln c \Rightarrow \frac{x}{1-10^{-6}x} = ce^{t/100} \\ &\Rightarrow x = \frac{ce^{t/100}}{1 + c10^{-6}e^{t/100}}, x(1980) = 10^5 \Rightarrow 10^5 = \frac{ce^{1980/100}}{1 + c10^{-6}e^{1980/100}} \\ c &= \frac{10^6}{9e^{\frac{99}{5}}} \Rightarrow x(2000) = \frac{\frac{10^6}{9e^{\frac{99}{5}}}e^{2000/100}}{1 + \frac{10^6}{9e^{\frac{99}{5}}}10^{-6}e^{2000/100}} \approx 119495 \end{aligned}$$

2. şıkkın çözümü için:

$$2.10^5 = \frac{\frac{10^6}{9e^{\frac{99}{5}}}e^{t/100}}{1+\frac{10^6}{9e^{\frac{99}{5}}}10^{-6}e^{t/100}} \Rightarrow e^{19.8-t/100} = \frac{4}{9} \Rightarrow t \approx 2061$$

□

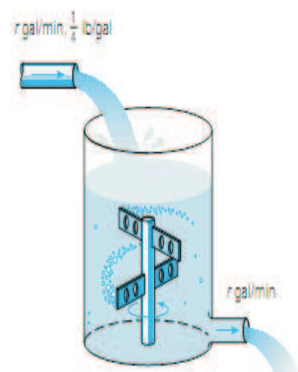
19. Karışım Problemleri

Burada karışımlardaki oranlar ele alınır. S maddesi belli oranlardaki karışımları içerip, karışım, karıştırıcı ile sabit tutuluyor. x ile S maddesinin miktarını gösterirsek dx/dt x deki değişimin t ye göre oranını verir. Buna göre diferansiyel modeli

$$\frac{dx}{dt} = giris\ verileri - çıkış\ verileri$$

olarak verilir.

Örnek 19.1. *Başlangıçta 50 gal(gallon, 3.78lt lik bir ölçü) saf su içeren bir tanker de* $t = 0$ *anında* 3 *gal/sn lik hızla tankın içine 2 lb lik tuz içeren çözülmüş tuzlu su eklenmektedir. Karıştırıcı ile karışım homojen tutulurken, başka bir vanadan aynı hızla karışım boşaltılmaktadır. Buna göre, tankta herhangi t zamanındaki tuz oranını nedir?*



Çözüm Giriş verileri: 3 gal/sn lik hızla tankın içine 2 lb lik tuz içeren çözülmüş tuzlu su⇒

$$giris\ verileri = 2(lb/gal)3(gal/sn) = 6\ lb/sn$$

Ekleme hızı ile boşaltma hızı aynı oranda olduğundan tank herhangi bir zamanda 50 gal'lik bir karışım içermektedir. Ve bunun x lb'si tuz ise tuz konsantrasyonu $x/50$ olarak verilir.

$$cikis\ verileri = \frac{x}{50}(lb/gal)3(gal/sn) = \frac{3x}{50}lb/sn$$

dir. O halde diferansiyel denklem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6 - \frac{3x}{50} \Rightarrow \frac{dx}{300-3x} = \frac{dt}{50} \Rightarrow \frac{dx}{x-100} = -\frac{3dt}{50} \Rightarrow \ln(x-100) = -\frac{3}{50}t + \ln c \Rightarrow \\ x - 100 &= ce^{-3t/100} \Rightarrow x(0) = 0 \end{aligned}$$

koşulundan

$$c = -100 \Rightarrow x = 100\left(1 - e^{-3t/100}\right)$$

□

Örnek 19.2. *Büyük bir su tankeri, başlangıçta içinde 10lb lik tuz oranı bulunan 50 gal lik bir tuzlu su içermektedir. Gallonunda 2 lb lik tuz bulunduran başka bir tuzlu su karışımı 5gal/sn lik hızla karışıma ilave edilmektedir. Karıştırıcı ile tuzlu su karışımı homojen tutulurken 3gal/sn lik hızla başka bir vanadan dışarı boşaltılmaktadır. Herhangi bir zamanda, su tankerindeki tuz oranını bulunuz?*

Çözüm Grişler:

$$giris\ verileri = 2(lb/gal)5(gal/sn) = 10\ lb/sn$$

giriş hızı 5 ve çıkış hızı 3 olduğuna göre toplam hız

$$5 - 3 = 2$$

ve böylece herhangi zamandaki tuzlu su miktarı, başlangıçta da 50 olduğundan

$$50 + 2t$$

ve tuz konsantrasyonu ise

$$\frac{x}{50 + 2t}$$

olarak verilir. Böylece □

$$cikis\ verileri = \frac{x}{50+2t}(lb/gal)3(gal/sn) = \frac{3x}{50+2t}lb/sn$$

O halde diferansiyel denklem:

$$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3x}{50+2t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} + \frac{3}{50+2t}x = 10$$

lineer denklemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{3}{50+2t}x &= 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{3}{50+2t}dt \Rightarrow \ln x = -\frac{3}{2}\ln(50+2t) + \ln c \Rightarrow \\ x &= c(50+2t)^{-3/2} \Rightarrow x = c(t)(50+2t)^{-3/2} \end{aligned}$$

homojen olmayan denklemin çözümü olsun.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad c'(50+2t)^{-3/2} - 3c(t)(50+2t)^{-5/2} + \frac{3}{50+2t}c(t)(50+2t)^{-3/2} = 10 \\ &\Rightarrow \quad c' = 10(50+2t)^{3/2} \Rightarrow c = \int 10(50+2t)^{3/2}dt = 8\sqrt{2}(t+25)^{5/2} + c_1 \\ &\Rightarrow \quad x = \left(8\sqrt{2}(t+25)^{5/2} + c_1\right)(50+2t)^{-3/2} \Rightarrow x(0) = 0 \end{aligned}$$

koşulundan

$$\begin{aligned} 0 &= \left(8\sqrt{2}(25)^{5/2} + c_1\right)(50)^{-3/2} \Rightarrow c = -25\,000\sqrt{2} \Rightarrow \\ x &= \left(8\sqrt{2}(t+25)^{5/2} - 25\,000\sqrt{2}\right)(50+2t)^{-3/2} \end{aligned}$$

sonuc olarak buluruz.

20. Elektrik Devre Problemleri

En basit elektrik devreleri, jeneratör veya pil gibi elektrik kaynağı ve enerjiyi kullanan bir rezistör (örneğin elektrik ampülü) (resistance) bulunan bir seri devredir. Eğer düğme kapatılırsa bir I akımı rezistöre doğru akacak ve bir voltaj düşmesine sebep olucaktır. Yani rezistörün iki ucundaki potansiyel farklı olucaktır. Bu potansiyel farkı veya voltaj düşüşü ise Voltmetre denilen bir elt ile ölçülebilir. Eketrik devrelerindeki basit bir kural Kirchoff kuralı olarak adalandırılır, Bu kurala göre, elektrik devresindeki tüm voltajların toplamı, toplam kuvvete eşittir. Toplam kuvveti $E(t)$ ile gösterirsek (emf-electromotive force)

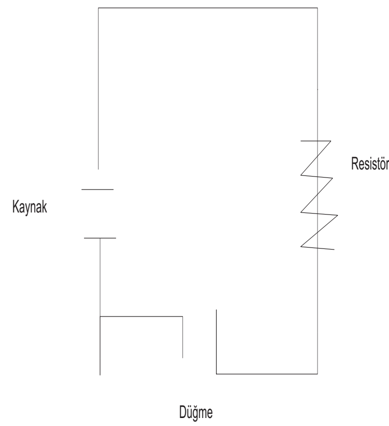
$$V_L + V_R + V_C = E(t)$$

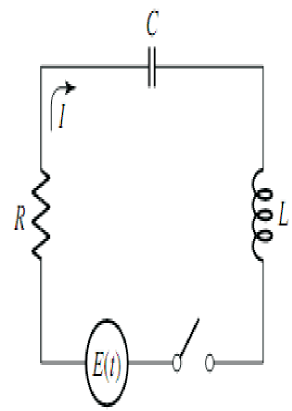
R rezistör (reistance), C kapasitör (capacitor), I indüktör (ınductor). $I = I(t)$ elektrik devresindeki akımı ve $q = q(t)$ kapasitördeki ani elektrik yükünü göstermek üzere

$$q' = I$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Ohm kanununa göre rezistör üzerindeki voltaj düşüklüğü akım ile doğru orantılıdır:

$$V_R = RI$$





burada R rezistörün direncidir ve sabittir. Kapasitördeki voltaj düşüşü ise kapasitördeki elektrik yükü ile orantılıdır ve

$$V_C = \frac{1}{C}q$$

olarak verilir. Burada C kapasitanstır (capacidance). Son olarak indüktördeki voltaj düşüşü ise akımın değişim hızı ile orantılıdır:

$$V_L = LI'$$

L sabitine indiktörün indüktansı denir (henry ile ölçülür) (inductance). Kirchoff kuralına göre

$$LI' + \frac{1}{C}q + RI = E(t)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada türev alırsak ve

$$q' = I$$

ifadesine göre

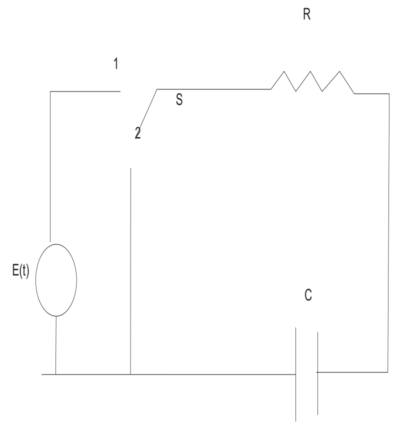
$$\begin{aligned} LI'' + \frac{1}{C}q' + RI' &= E'(t) \Rightarrow \\ LI'' + RI' + \frac{1}{C}I &= E'(t) \Rightarrow \end{aligned}$$

2.mertebeden denklemi RCL denklemi olarak adalndırılır.
Indüktörün olmadığı durumda devreye RC devresi denir ve denklem

$$\begin{aligned} V_C + V_R &= E(t) \Rightarrow \frac{1}{C}q + RI = E(t) \Rightarrow I = q' \Rightarrow \\ Rq' + \frac{1}{C}q &= E(t) \end{aligned}$$

olan 1. mertebeden ADD elde ederiz.

Örnek 20.1. *Şekilde verilen RC devresinde (a) önce S anahtarının 1 konumuna getirilmesi durumunda (b) S anahtarının 2 konumuna getirilmesi durumunda devreden geçen akım şiddetini bulunuz.*



Çözüm (a) eğer anahtar bir durumunda ise emf-electromotive force $E(t)$ dir ve denklem

$$Rq' + \frac{1}{C}q = E(t) \Rightarrow q' + \frac{1}{RC}q = \frac{E(t)}{R}$$

lineer denklemdir ve çözüm

$$\begin{aligned} q &= e^{-\int \frac{1}{RC}dt}\left(\int \frac{E(t)}{R}e^{\int \frac{1}{RC}dt}dt + c_1\right) \Rightarrow \\ q' &= \frac{E(t)}{R} - \frac{1}{RC}q = I \Rightarrow \\ I &= \frac{E(t)}{R} - \frac{1}{RC}\left(e^{-\frac{t}{RC}}\left(\int \frac{E(t)}{R}e^{\frac{t}{RC}}dt + c_1\right)\right) \end{aligned}$$

(b) şıkkı için ise $E(t) = 0$ durumudur ve denklemin çözümünde yerine yazdığımızda

$$I = -\frac{c_1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

olarak buluruz. Buradaki - işareti akımın ters yöne doğru gittiğini gösterir. □

Örnek 20.2. 20Ω *luk bir direnç teli,* $0.01F\,(Farad)$ *lık bir kapasitansı olan kondansatör, emf(electromotive force)'si* $40e^{-2t}+20e^{-4t}$ *lik bir üretece seri olarak bağlanıyor. Başlangıç zamanda yükü olmadığına göre herhangi bir andaki yükünü bulunuz?*

Çözüm

$$R = 20,\ C = 0.01F,\ E(t) = 40e^{-2t} + 20e^{-4t}$$

verileri ve denklem:

$$\begin{aligned} q' + \frac{1}{RC}q &= \frac{E(t)}{R} \\ q(0) &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklemi için önce homojen denklemi ele alalım:

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt = -5dt \Rightarrow q = ce^{-5t}$$

ve homojen olmayan denklemin çözümü

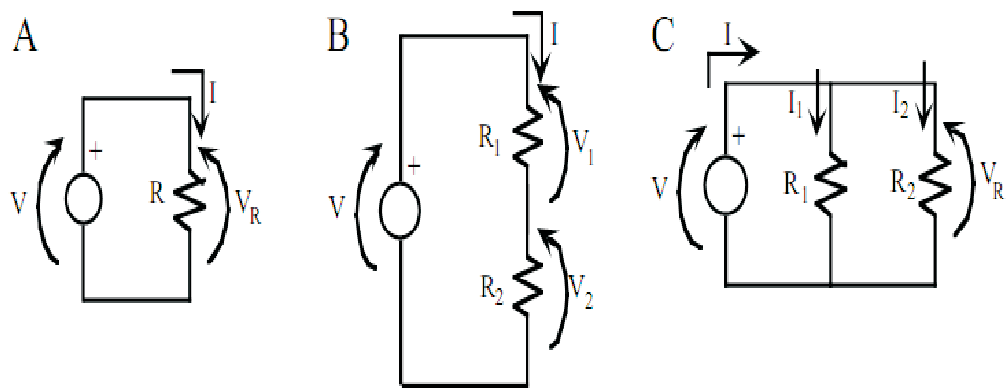
$$q = c(t)\,e^{-5t}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad c'e^{-5t} - 5ce^{-5t} + 5e^{-5t} = 40e^{-2t} + 20e^{-4t} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad c' = 40e^{3t} + 20e^{t} \Rightarrow c(t) = \frac{40}{3}e^{3t} + 20e^{t} + c_1 \\
&\Rightarrow \quad q = \left(\frac{40}{3}e^{3t} + 20e^{t} + c_1\right)e^{-5t} \Rightarrow q(0) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{100}{3} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad q = \left(\frac{40}{3}e^{3t} + 20e^{t} - \frac{100}{3}\right)e^{-5t}
\end{aligned}$$

□

Basit bir elektrik devresini olarak ifade edebiliriz. Şimdi sırasıyla herbir durumu irdeleyelim:



A. $V_R = RI$ ve $V - V_R = 0$ olmalı. Bunun anlamı ise V ve V_R karşılıklı olarak ters yönde hareket ettiğinden işaretleri farklı olmalıdır. $V = V_R$ bağıntısından ise voltaj düşüklüğünün olmadığını söyleyebiliriz.
B. $V - V_1 - V_2 = 0$ koşulundan ve $V_1 = I.R_1,\ V_2 = I.R_2 \Rightarrow V = I(R_1 + R_2)$ olarak buluruz. $R_s = R_1 + R_2$ ise toplam resistansı verir.

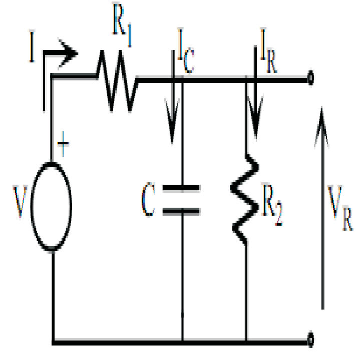
$$\begin{aligned}
V &= I(R_1 + R_2) \Rightarrow I = \frac{V}{R_1 + R_2} \Rightarrow \\
V_1 &= I.R_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V, \\
V_2 &= I.R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}V
\end{aligned}$$

C. koşulunda ise

$$\begin{aligned}
V &= V_R = I_1R_1 = I_2R_2 \Rightarrow I = I_1 + I_2 \Rightarrow \\
I &= V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow V = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I \Rightarrow \\
I_1 &= \frac{V}{R_1} = \frac{1}{R_1}\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I = \frac{R_2}{R_1 + R_2}I \Rightarrow \\
I_2 &= \frac{V}{R_2} = \frac{1}{R_2}\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I = \frac{R_1}{R_1 + R_2}I
\end{aligned}$$

sonuçlarını elde ederiz.

Örnek 20.3. *Bu şekilde ve yukraıdaki şekilde V ile gösterilen aslında $E(t)$ dir.*



$$\Rightarrow \quad I_C = C\frac{dV_R}{dt}, I_r = \frac{V_R}{R_2}, I = \frac{1}{R_1}\left(V - V_R\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I = I_C + I_R \Rightarrow \frac{1}{R_1}\left(V - V_R\right) = C\frac{dV_R}{dt} + \frac{V_R}{R_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV_R}{dt} + \left(\frac{1}{CR_2} + \frac{1}{CR_1}\right)V_R = \frac{V}{R_1}$$

CHAPTER 4

1. mertebeden yüksek dereceli ADD

1.mertebeden yüksek mertebeli ADD genel formu

$$F(x, y, y\prime) = 0 \tag{15.1}$$

şeklindedir. Genel olarak

$$y\prime = p$$

olarak gösterilir. Buna göre (15.1) denklemi

$$F(x, y, p) = 0 \tag{15.2}$$

şeklinde ifade edilir.

Uyarı 15.4. *(15.1) denklemini çözmek genelde çok kolay değildir. Ve hatta çözümün olması da gerekmez. Bunun için en önemli sonuçları burada belirteceğiz.*

16. $y = f(x, p)$ formundaki ADD

(15.1) denklemi

$$y = f(x, p) \tag{16.1}$$

formunda olsun.

$$\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow dy = pdx$$

ve (16.1) denkleminden

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp &= dy = pdx \Rightarrow dx \text{ e bölersek} \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} &= p \end{aligned} \tag{16.2}$$

(16.2) denklemi p ve x in denklemidir ve Bölüm 2 deki çözÜm yöntemleri ile çözüm elde edilebilir.

Örnek 16.1.

$$y^2 - 1 + y\prime^2 = 0 \tag{16.3}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm (16.3) denklemini

$$y = \sqrt{1 - p^2} \tag{16.4}$$

olarak da yazabiliriz. (16.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
f(x,p) &= \sqrt{1-p^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} &= p \Rightarrow \\
-\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx} &= p \Rightarrow \\
p\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx}\right) &= 0 \Rightarrow \\
1 + \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\frac{dp}{dx} &= 0,\ p = 0 \Rightarrow \\
\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}dp &= -dx,\ \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \\
\arcsin p &= -x + c,\ y = c \Rightarrow \\
p &= \sin(-x+c),\ y = c \Rightarrow \\
y &= \cos(-x+c),\ y = c
\end{aligned}$$

(16.4) ADD nin çözümleridir. □

17. $x = f(y,p)$ formundaki ADD

(15.1) denklemi

$$x = f(y,p) \tag{17.1}$$

formunda olsun.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{p}$$

ve (17.1) denkleminden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} &= \frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} \Rightarrow \\
\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} &= \frac{1}{p} \qquad (17.2)
\end{aligned}$$

(17.2) denklemi p ve y in denklemidir ve Bölüm 2 deki çözüm yöntemleri ile çözüm elde edilebilir.

Örnek 17.1.

$$x - 1 + y\prime^2 = 0 \tag{17.3}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm (17.3) denklemini

$$x = 1 - p^2$$

olarak da yazabiliriz. (17.2) ifadesinden

$$\begin{aligned}
f(x,p) &= 1 - p^2 \\
\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} &= \frac{1}{p} \Rightarrow \\
-2p\frac{dp}{dy} &= \frac{1}{p} \Rightarrow -2p^2 dp = dy \Rightarrow \\
-\frac{2}{3}p^3 &= y + c \Rightarrow p = \frac{dy}{dx} = \left(-\frac{3}{2}(y+c)\right)^{1/3} \Rightarrow \\
\frac{dy}{\left(-\frac{3}{2}(y+c)\right)^{1/3}} &= dx \Rightarrow \frac{1}{(-3/2)^{1/3}}\frac{(y+c)^{2/3}}{2/3} = x \Rightarrow
\end{aligned}$$

(17.3) ADD nin çözümleridir. □

18. Lagrange Denklemi

$$y = \varphi(y\prime)\,x + \psi(y\prime) \tag{18.1}$$

veya

$$y = \varphi(p)\,x + \psi(p) \tag{18.2}$$

türündeki denklemlere Lagrange denklemi denir. (18.2) denklemini x e göre diferansiyelini alırsak

$$\begin{aligned}
p &= \varphi(p) + x\varphi\prime(p)\frac{dp}{dx} + \psi\prime(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \\
p - \varphi(p) &= x\varphi\prime(p)\frac{dp}{dx} + \psi\prime(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \\
1 &= \frac{x\varphi\prime(p)}{p-\varphi(p)}\frac{dp}{dx} + \frac{\psi\prime(p)}{p-\varphi(p)}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \\
\frac{dx}{dp} &= \frac{\varphi\prime(p)}{p-\varphi(p)}x + \frac{\psi\prime(p)}{p-\varphi(p)} \qquad (18.3)
\end{aligned}$$

lineer denklemini elde ederiz ve çözümünü

$$x = t(p, c) \tag{18.4}$$

(Bkz. Bölüm 2 te lineer ADDin çözümünden elde ederiz) olarak yazalım. Buna göre (18.4) yı (18.2) çözümünde yerine yazarsak çöüzümün parametrik gösterimi olarak

$$y = \varphi(p)\,x + \psi(p) \tag{18.5}$$

elde ederiz.

Örnek 18.1.

$$y = 2xy\prime + y\prime^2 \text{ ya da } y = 2xp + p^2 \tag{18.6}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm (18.1) ifadesine göre

$$\varphi(p) = 2p,\ \psi(p) = p^2$$

ve (18.3) dönüşümünden

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2}{p-2p}x + \frac{2p}{p-2p} = -\frac{2}{p}x - 2$$

lineer denklemini elde ederiz. (10.1) ifadesinden

$$a(p) = \frac{2}{p},\ b(p) = -2$$

ve (10.6) çözümünden

$$\begin{aligned}
x &= e^{-\int \frac{p}{p}dp}\left(\int -2e^{\int \frac{3}{p}dp}dp + c_1\right) \\
&= e^{\ln p^{-2}}\left(\int -2e^{\ln p^2}dp + c_1\right) \\
&= p^{-2}\left(\int -2p^2dp + c\right) \\
&= p^{-2}\left(-\frac{2}{3}p^3 + c\right) \qquad (18.7)
\end{aligned}$$

elde ederiz. $(18.7)'$ u $(18.6)'$de yerine yazdığımızda

$$y = 2p^{-1}\left(-\frac{2}{3}p^3 + c\right) + p^2 \tag{18.8}$$

elde ederiz. (18.7) ve (18.8) , (18.6) ın genel çözümünün parametrik denklemidir. □

19. Clairaut Denklemi

Lagrange denkleminde $\varphi(p) = p$ durumunda

$$y = xy\prime + \psi(y\prime) \text{ veya } y = px + \psi(p) \tag{19.1}$$

türündeki denklemlere Clairaut denklemi denir. (19.1) denklemini x e göre diferansiyelini alırsak

$$\begin{aligned} p &= p + x\frac{dp}{dx} + \psi\prime(p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \\ \frac{dp}{dx}(x + \psi\prime(p)) &= 0 \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow \\ p &= c \end{aligned} \tag{19.2}$$

çözümünü elde ederiz. Bu (19.2) yi (19.1) denkleminde kullanırsak (19.1) denkleminin genel çözümünü

$$y = cx + \psi(c) \tag{19.3}$$

elde ederiz.
Bunun yanında eğer

$$x + \psi\prime(p) = 0 \tag{19.4}$$

sağlanırsa bu denklemin genel çözümünü de

$$p = t(x) \tag{19.5}$$

olarak gösterelim. Tekrar (19.5) yi (19.1) denkleminde kullanırsak (19.1) denkleminin genel çözümünü

$$y = xt(x) + \psi(t(x)) \tag{19.6}$$

olarak elde ederiz.

Örnek 19.1.

$$\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy}{dx} \ \ ya\ da\ \ (p-1)(y - xp) = p \tag{19.7}$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm (19.7) yı düzenlediğimizde

$$y = px + \frac{p}{p-1} \tag{19.8}$$

elde ederiz. (19.2) ifadesine göre

$$\psi(p) = \frac{p}{p-1} \tag{19.9}$$

ve (19.2) dönüşümünden

$$p = c \tag{19.10}$$

elde ederiz. Bu (19.10) yi (19.8) denkleminde kullanırsak (19.7) denkleminin genel çözümünü

$$y = cx + \frac{c}{c-1} \tag{19.11}$$

elde ederiz. Eğer (19.4) sağlanırsa

$$\begin{aligned} x + \psi\prime(p) &= x + \frac{p\prime(p-1) - p\prime p}{(p-1)^2} = x - \frac{p\prime}{(p-1)^2} = 0 \Rightarrow \\ \frac{dp}{(p-1)^2} &= xdx \Rightarrow \int \frac{dp}{(p-1)^2} = \int xdx \Rightarrow (6) \text{ ifadesinden} \\ -\frac{1}{p-1} &= \frac{x^2+c}{2} \Rightarrow \\ p &= 1 - \frac{2}{x^2+c} \end{aligned} \tag{19.12}$$

elde ederiz. Bu (19.12) yi (19.8) denkleminde kullanırsak (19.7) denkleminin genel çözümünü

$$y = \left(1 - \frac{2}{x^2+c}\right)x + 1 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{x^2+c}\right) - 1} \tag{19.13}$$

elde ederiz. $\square$

CHAPTER 5

Yüksek Mertebeden Lineer ADD

21. Giriş

Tanım 21.1. *n. inci mertebeden homojen olmayan bir lineer ADD genel olarak*

$$
\begin{aligned}
a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y &= F(x) \qquad (21.1)\\
a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y &= F(x)
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. Burada $a_0(x)$, $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ değişken katsayılardır. Bu katsayılar ve $F(x)$ fonksiyonu, x 'in bir $I = [a, b]$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyon larıdır.

Tanım 21.2. *Eğer, $F(x) = 0$ ise, (21.1) denklemi*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (21.2)$$

şeklini alır. O zaman bu denkleme, n 'inci mertebeden değişken katsayılı homojen lineer ADD denir.

Örnek 21.3. $y'' + 3xy' + x^3y = e^x$ *lineer 2. mertebeden ADD dir.*

22. Lineer homojen ADD için temel teoremler

homojen olmayan n.inci mertebeden değişken katsayılı bir lineer diferansiyel denklemin, yani (21.1) denkleminin genel çözümünü bulmak amacımızdır. Bunun için önce (21.2) homojen diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunması incelenecektir. ((21.1) diferansiyel denkleminin çözümü ile ilgili varlık teoremi Teorem (4.23) de ele alınmıştır.)

Teorem 22.1. *n. inci mertebeden bir homojen diferansiyel denklemin biribirinden farklı m sayıda çözümü $y_1, y_2, ..., y_m$ olsun. Burada $m \leq n$'dır. Bu durumda $c_1, c_2, ..., c_m$ katsayıları keyfi sabit sayılar olmak üzere, $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_my_m$ fonksiyonu da aynı denklemin bir çözümü olur.*

Tanım 22.2. *$y_1, y_2, ..., y_m$ herhangi fonksiyonlar ve $c_1, c_2, ..., c_m$ herhangi keyfi sabit sayılar olsunlar. Bu durumda $c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_my_m$ ifadesine $y_1, y_2, ..., y_m$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu denir.*

Uyarı 22.3. *Tanım 22.2 e göre (21.2) homojen diferansiyel denklemin çözümlerinin lineer kombinasyonu da bir çözümdür.*

Örnek 22.4. $\sin x$ *ve* $\cos x$ *fonksiyonları $y'' + y = 0$ ADD nin çözümüdür. Uyarı 22.14'a göre $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ de denklemin çözümüdür.*

Tanım 22.5. *Bir $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlamış olan $y_1, y_2, ..., y_m$ fonksiyon kümesi için, hepsi sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_m$ gibi sabit sayılar bulunabilirse ve x'in bu aralıktaki bütün değerleri için,*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_my_m = 0$$

ise, bu fonksiyonlara aralarında lineer bağımlı fonksiyonlar denir.

Örnek 22.6. *x ve $2x$ fonksiyonları $[0, 1]$ aralığında lineer bağımlıdır. Çünkü*

$$c_1x + c_2(2x) = 0 \Rightarrow (c_1 + 2c_2)x = 0, \ \forall x \in [0, 1] \Rightarrow c_1 + 2c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -2c_2$$

Örneğin $c_2 = -1$, $c_1 = 2$ için ifade sağlanmış olur.

Tanım 22.7. *Bir $a \leq x \leq b$ aralığında lineer bağımlı olmayan fonksiyonlara ise, lineer bağımsız fonksiyonlar denir. Yani,*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_my_m = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

Örnek 22.8. *x ve x^2 fonksiyonları $[0,1]$ aralığında lineer bağımsızdır. $c_1x + c_2x^2 = 0$ ifadesini diferansiyellersek $c_1 + 2c_2x = 0$ elde ederiz ve x ile bu denklemi çarparsak $c_1x + 2c_2x^2 = 0$ elde ederiz.*

$$c_1x + c_2x^2 = 0 \text{ ve } c_1x + 2c_2x^2 = 0, \ \forall x \in [0,1]$$

denklemlerini çıkartırsak $c_2x^2 = 0, \ \forall x \in [0,1]$ elde ederiz. Buna göre $c_2 = 0 = c_1$ dir.

Teorem 22.9. *(21.2) homojen diferansiyel denklemi n lineer bağımsız çözüme sahiptir. $y_1, y_2, ..., y_n$ (21.2) homojen diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise (21.2) nin genel çözümü*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

ile ifade edilir. Burada $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabit sayılar.

Örnek 22.10. *$\sin x$ ve $\cos x$ lineer bağımsız fonksiyonları $y'' + y = 0$ ADD nin çözümüdür. Uyarı 22.14'a ve Teorem 22.9 göre $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ de denklemin çözümüdür.*

Şimdi, iki veya daha fazla fonksiyonun hangi koşullarda lineer bağımlı veya lineer bağımsız olduğunu araştıralım.

Tanım 22.11. *Bir $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlamış olan $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları $(n-1)$. mertebden türeve sahip olsunlar.*

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

determinantına Wronskian denir ve $a \leq x \leq b$ noktasındaki değeri kısaca $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ ile gösterilir.

Teorem 22.12. *$y_1, y_2, ..., y_n$ (21.2) homojen diferansiyel denkleminin çözümleri lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ olmalıdır.*

Örnek 22.13. *$\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları $y'' + y = 0$ ADD nin lineer bağımsız çözümüdür ve*

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Uyarı 22.14. *(21.2) homojen diferansiyel denkleminin çözümü $y(x)$ olsun ve*

$$y(x_0) = 0, \ y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

koşulunu sağlıyorsa bu durumda çözüm $y(x) = 0$ dır.

Tanım 22.15. *Uyarı 22.14 deki çözüme aşikar çözüm denir.*

23. Mertebenin indirgenmesi

Teorem 23.1. *(21.2) homojen diferansiyel denkleminin aşikar olmayan f çözümünü biliyorsak $y = fv$ dönüşümü ile denklemi $(n-1)$. mertebeye indirgeyebiliriz.*

Teorem 23.2.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{23.1}$$

homojen diferansiyel denkleminin aşikar olmayan f olsun.

$$y = fv \tag{23.2}$$

dönüşümünü denklemde yerine yazalım

$$\begin{aligned} a_0(x)(fv)'' + a_1(x)(fv)' + a_2(x)fv &= 0 \Rightarrow \\ a_0(x)(f''v + 2f'v' + fv'') + a_1(x)(f'v + fv') + a_2(x)fv &= 0 \Rightarrow \\ \underbrace{(a_0(x)f'' + a_1(x)f' + a_2(x)f)}_{=0}v + a_0(x)fv'' + (2a_0(x)f' + a_1(x)f)v' &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

ile (23.1) denklemini

$$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + [2a_0(x)f'(x) + a_1(x)f(x)]w = 0 \tag{23.3}$$

denklemine indirgeyebiliriz. Burada $w = v'$ dır. Buna göre (23.3) denkleminin çözümü

$$w = \frac{\exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}{\left[f(x)\right]^2}$$

ve

$$w = v' \Rightarrow v = \int \frac{\exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}{\left[f(x)\right]^2}dx \tag{23.4}$$

şeklindedir.

Örnek 23.3. *$y = x$ fonksiyonu $\left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin bir çözümü olmak üzere, mertebenin indirgenmesi yöntemini kullanarak lineer bağımsız çözümü bulunuz.*

Çözüm (23.1) e göre $a_0(x) = x^2+1,\ a_1(x) = -2x,\ a_2(x) = 2$ dir. (23.4) ten

$$\begin{aligned}
v &= \int \frac{\exp\left(-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right)}{\left[f(x)\right]^2}dx \\
&= \int \frac{\exp\left(-\int \frac{-2x}{x^2+1}dx\right)}{x^2}dx \underset{x^2+1=u \Rightarrow 2xdx=du}{=} \int \frac{\exp\left(\int \frac{du}{u}\right)}{x^2}dx \\
&= \int \frac{\exp(\ln u)}{x^2}dx = \int \frac{u+c}{x^2}dx \underset{x^2+1=u}{=} \int \frac{x^2+1}{x^2}dx = \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= x - \frac{1}{x} + c = x - \frac{1}{x} + c
\end{aligned}$$

(23.2) dönüşümünden çözümü

$$y = x\left(x - \frac{1}{x} + c\right) = x^2 + cx - 1$$

şeklinde elde ederiz. Teorem 22.1 e göre

$$\begin{aligned}
y &= c_2x + c_3\left(x^2+cx-1\right) \\
&= A\left(x^2-1\right) + Bx
\end{aligned}$$

genel çözümdür. □

Örnek 23.4. *$y = x$ fonksiyonu*

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$$

denkleminin bir çözümü olsun. Mertebenin indirgenmesi yöntemi ile genel çözümü bulunuz.

Çözüm

$$y = xv$$

dönüşümünü denklemde yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
x^2(xv)'' - 4x(xv)' + 4xv &= 0 \Rightarrow x^2\left(2v' + xv''\right) - 4x\left(v + xv'\right) + 4xv = 0 \Rightarrow \\
x^2\left(xv'' - 2v'\right) &= 0 \Rightarrow xv'' - 2v' = 0 \underset{w=v'}{\Rightarrow} xw' = 2w \Rightarrow \frac{dw}{w} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \\
\ln w &= 2\ln x + \ln c \Rightarrow w = cx^2 \underset{w=v'}{\Rightarrow} v' = cx^2 \Rightarrow dv = cx^2dx \Rightarrow \\
v &= \frac{cx^3}{3} + c_1 \Rightarrow y = x\left(\frac{cx^3}{3} + c_1\right) = \frac{cx^4}{3} + c_1x
\end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz. Teorem 23.9 e göre

$$\begin{aligned}
y &= c_2x + c_3\left(\frac{cx^4}{3} + c_1x\right) \\
&= A\frac{x^4}{3} + Bx
\end{aligned}$$

genel çözümdür. □

24. Sabit katsayılı homojen lineer ADD

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n\text{-}1}y' + a_ny = 0 \tag{24.1}$$

sabit katsayılı homojen denklemin çözümünü

$$y = e^{mx} \tag{24.2}$$

olarak arayalım. Buna göre

$$\frac{d^ky}{dx^k} = m^ke^{mx}, \ k = 1, .., n$$

türevlerini (24.1) denkleminde yerine yazarsak

$$e^{mx}\left(a_0m^n + a_1m^{n-1} + +... + a_{n\text{-}1}m + a_n\right) = 0$$

denklemini elde ederiz. $e^{mx} \neq 0$ olduğundan

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + +... + a_{n\text{-}1}m + a_n = 0 \tag{24.3}$$

elde edilir.

Tanım 24.1. *$(24.3)'$e diferansiyel denklemin karakteristik denklemi denir. Bu denklem n'inci dereceden bir cebirsel denklem olduğuna göre, denklemin $m_1, m_2, ..., m_n$ gibi n tane kökü olmalıdır. Bu kökler birer birer denklem (24.1)'da yerine konursa her defasında bir özel çözüm elde edilecektir. Buna göre denklemin köklerine göre çözümü irdeleyelim.*

24.1. 1. Durum: Ayrık reel kökler. (24.3) denkleminin n tane farklı (ayrık) kökünün olduğu durumdur.

Teorem 24.2. *(24.3) denkleminin n tane $m_1, m_2, ..., m_n$ gibi farklı (ayrık) reel kökü var ise (24.1) denkleminin genel çözümü*

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + ... + c_ne^{m_nx} \tag{24.4}$$

şeklindedir. $c_1, c, ..., c_n$ keyfi sabitlerdir.

Örnek 24.3. *$y'' - 3y' + 2y = 0$ ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm Karakteristik denklem $m^2 - 3m + 2 = 0$. Böylece denklemin çözümü $(m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m_1 = 1, \ m_2 = 2$. $(24.4)'$dan

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x}$$

çözümdür. □

Uyarı 24.4. *Örnek 24.3'de görüldüğü üzere e^x ve e^{2x} fonksiyonları lineer bağımsızdır.*

$$W\left(e^x, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^x \neq 0$$

dır.

Örnek 24.5. *$y'' - y' - 12y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$ BDP nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm Diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$$m^2 - m - 12 = 0$$

çözümler $m_{1,2} = -3, 4$, ve 1. Durum: dir. Buna göre

$$e^{-3x}, e^{4x}$$

lineer bağımsız çözümlerdir. Teorem 23.9 a göre

$$y = c_1e^{-3x} + c_2e^{4x}$$

çözümdür.

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 5$$

koşullarından

$$\begin{array}{r} c_1 + c_2 = 3 \\ -3c_1 + 4c_2 = 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1, c_2 = 2$$
$$\Rightarrow \quad y = e^{-3x} + e^{4x}$$

çözümdür. □

24.2. 2. Durum: Tekrarlı kökler.

Teorem 24.6. *(24.3) denkleminin kökleri k defa tekrarlanıyorsa $(m_1 = m_2 = \cdots = m_k = m)$ bu durumda (24.1) denkleminin tekrar eden köklere karşılık gelen çözümü*

$$\left(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{mx} \tag{24.5}$$

şeklindedir. $m_{k+1}, m_{k+2}, \ldots, m_n$ birbirinden farklı reel kökler olmak üzere (24.1) denkleminin genel çözümü

$$y = \left(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{mx} + c_{k+1} e^{m_{k+1} x} + c_{k+2} e^{m_{k+2} x} + \ldots + c_n e^{m_n x} \tag{24.6}$$

formundadır.

Örnek 24.7. *$y^{iv} + 5y''' + 6y'' + 4y' - 8y = 0$ ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm Denklemin karakteristik denklemi

$$m^4 + 5m^3 + 6m^2 + 4m - 8 = 0$$

ve denklemin kökleri $2, 2, 2, -1$ dir. Buna göre tekrar eden $m = 2$ köküne karşılık gelen çözüm (24.5) dan

$$y_1 = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{2x}$$

ve $m_2 = -1$ köküne karşılık gelen çözüm

$$y_2 = c_4 e^{-x}$$

dir. Buna göre genel çözüm (24.6) den

$$y = y_1 + y_2 = \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2\right) e^{2x} + c_4 e^{-x}$$

dır. □

Örnek 24.8. *$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y''' = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.*

Çözüm Diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$$m^5 - 2m^4 + m^3 = 0$$

ve çözümler $m_{1,2,3,4,5} = 0, 0, 0, 1, 1$ ve 2. Durum: Tekrarlı kökler dir. Buna göre

$$1,\ x,\ x^2,\ e^x,\ xe^x$$

lineer bağımsız çözümlerdir. Teorem 23.9 a göre

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x + c_5 xe$$

çözümdür. □

24.3. 3. Durum: Kompleks eşlenik kökler.

Tanım 24.9. *$i^2 = -1$ olmak üzere kompleks sayılar $a + ib$, $b \neq 0$ formundadır. (a, b reel sayılar). $a - ib$ sayısına ise $a + ib$ nin kompleks eşleniği denir.*

Teorem 24.10. *(24.3) denkleminin kompleks eşlenik kökleri $a + ib$ ve $a - ib$ tekrarlanmasınlar. Bu durumda genel çözüm*

$$y = e^{ax} \left(c_1 \sin bx + c_2 \cos bx\right) \tag{24.7}$$

olarak yazılır.

PROOF. Genel çözümü

$$k_1 e^{(a+ib)x} + k_2 e^{(a-ib)x}$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Euler formulünü kullanırsak

$$\begin{aligned} k_1 e^{(a+ib)x} + k_2 e^{(a-ib)x} &= k_1 e^{ax} e^{ibx} + k_2 e^{ax} e^{-ibx} \\ &= e^{ax}\left(k_1 e^{ibx} + k_2 e^{-ibx}\right) \\ &= e^{ax}\left(k_1(\cos bx + i\sin bx) + k_2(\cos bx - i\sin bx)\right) \\ &= e^{ax}\left((k_1+k_2)\cos bx + i(k_1-k_2)\sin bx\right) \\ &= e^{ax}\left(c_1 \sin bx + c_2\cos bx\right), \ c_1 = k_1+k_2, c_2 = k_1 - k_2 \end{aligned}$$

elde ederiz. □

Örnek 24.11. *$y'' - 6y' + 25y = 0$ ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm ADD nin karakteristik denklemi $m^2 - 6m + 25 = 0$ dır. Denlemin kökleri

$$\begin{aligned} m &= \frac{6 \pm \sqrt{36-100}}{2} = \frac{6 \pm 8i}{2} = 3 \pm 4i \Rightarrow \\ a &= 3, \ b = 4 \underset{(24.7)}{\Rightarrow} \\ y &= e^{3x}\left(c_1 \sin 4x + c_2 \cos 4x\right) \end{aligned}$$

çözümdür. □

Teorem 24.12. *(24.3) denkleminin kompleks eşlenik kökleri $a+ib$ ve $a-ib$ k defa tekrarlansınlar. Bu durumda tekrarlanan köklere karşılık gelen genel çözüm*

$$y = e^{ax}\left(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}\right)\sin bx + e^{ax}\left(c_1 + c_2 x + \cdots + c_k x^{k-1}\right)\cos bx \tag{24.8}$$

olarak yazılır.

Örnek 24.13. *$y^{vi} - 2y''' + y = 0$ ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm Diferansiyel denklemin karakteristik denklemi

$$m^6 - 2m^3 + 1 = 0$$

çözümler $m_{1,2,3} = 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ve diğerleri eşit olmak üzere 1. Durum: Ayrık reel kökler & 2. Durum & 3. Durum: Kompleks eşlenik kökler dir. Buna göre

$$e^x, xe^x, e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}, e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}, xe^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}, xe^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

lineer bağımsız çözümlerdir. Teorem 23.9 a göre

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_4 e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_5 x e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + c_6 x e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}$$

çözümdür. □

25. Homojen olmayan ADD

(21.1) homojen olmayan denklemi ele alalım:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

Teorem 25.1. *v fonksiyonu (21.1) homojen olmayan denklemin bir çözümü ve u fonksiyonu (21.2) homojen denklemin çözümü ise $u+v$ fonksiyonu da (21.1) homojen olmayan denklemin bir çözümüdür.*

Örnek 25.2. *$y = x$ fonksiyonu $y'' + y = x$ homojen olmayan denkleminin bir çözümüdür.* $\sin x$ *fonksiyonu $y'' + y = 0$ homojen ADD nin çözümüdür. Teorem 25.1'e göre $y = x + \sin x$ fonksiyonu da $y'' + y = x$ denkleminin çözümüdür.*

(21.2) homojen denklemin genel çözümü olan y_c (*complementary function*)'nin nasıl bulunduğunu biliyoruz. Şimdi ise amacımız, homojen olmayan bu denklemin bir özel çözümü olan ve bir keyfi sabit sayı içermeyen y_p (*particular integral*) çözümünü ve sonuç olarak (21.1) homojen olmayan denkleminin genel çözümünü bulmaktır. y_p 'nin bulunması ile ilgili olarak birkaç metot geliştirilmiştir. Bu metotlar, sırası ile,

(i)**:** Belirsiz Katsayılar Metodu
(ii)**:** Parametrelerin Değişimi Metodu

25.1. Belirsiz Katsayılar Metodu.

Tanım 25.3. *Eğer*

(1) x^n, $n \geq 0$ *pozitif sayı*
(2) e^{ax}, $a \neq 0$
(3) $\sin(bx+c)$, $b \neq 0, c$ *sabitler*
(4) $\cos(bx+c)$, $b \neq 0, c$ *sabitler*

fonksiyonlarından birisi veya bunları lineer kombinasyonu ise fonksiyona UC (undetermined coefficient) fonksiyonu denir.

Örnek 25.4. $x^3, e^{-2x}, \sin(3x/2)$, $\cos(2x+\pi/4)$ *UC fonksiyonlarıdır.*

Tanım 25.5. *Lineer bağımsız UC fonksiyonlarının kümesine kısaca UC kümesi denir.*

	UC fonksiyonu	UC kümesi
1	x^n	$\{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}$
2	e^{ax}	$\{e^{ax}\}$
3	$\sin(bx+c)$ veya $\cos(bx+c)$	$\{\sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
4	$x^n e^{ax}$	$\{x^n e^{ax}, x^{n-1}e^{ax}, \ldots, xe^{ax}, e^{ax}\}$
5	$x^n \sin(bx+c)$ veya $x^n \cos(bx+c)$	$\{x^n \sin(bx+c), x^n \cos(bx+c),$ $x^{n-1}\sin(bx+c), x^{n-1}\cos(bx+c),$ $\ldots, x\sin(bx+c), x\cos(bx+c),$ $\sin(bx+c), \cos(bx+c)\}$
6	$e^{ax}\sin(bx+c)$ veya $e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$
7	$x^n e^{ax}\sin(bx+c)$ veya $x^n e^{ax}\cos(bx+c)$	$\{x^n e^{ax}\sin(bx+c), x^n e^{ax}\cos(bx+c),$ $x^{n-1}e^{ax}\sin(bx+c), x^{n-1}e^{ax}\cos(bx+c),$ $\ldots, xe^{ax}\sin(bx+c), xe^{ax}\cos(bx+c),$ $e^{ax}\sin(bx+c), e^{ax}\cos(bx+c)\}$

Örnek 25.6. $f(x) = x^2 \sin x$ *fonksiyonunun UC kümesi* $\{x^2\sin x, x^2\cos x, x\sin x, x\cos x, \sin x, \cos x\}$

Yöntem

(21.1) homojen olmayan denkleminde

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n\_1}(x)y' + a_n(x)y = F(x)$$

$F(x)$ fonksiyonunu UC fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olması durumunda bu yöntemi ugulayabiliriz.

(1) $F = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_m u_m$ olsun. Burada $u_1, u_2, \ldots, u_m$ UC fonksiyonlarıdır.
(2) $u_1, u_2, \ldots, u_m$ UC fonksiyonlarına karşılık gelen UC kümelerini $S_1, S_2, \ldots, S_m$ olarak belirleyelim.
(3) Denk veya birbirinde içerilen kümeleri elimine edelim veya üst kümeyi seçelim.
(4) Eğer UC kümelerinin elemanları, türdeş kısmın çözümünde olmayacak eşkilde x in en küçük kuvveti ile çarpıp kümeyi yeniden düzenleyelim.
(5) Özel çözümü bu UC fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olduğunu varsayalım.
(6) Lineer kombinasyondaki bilinmeyen katsayıları denklemde yerine yazarak belirleyelim.

Örnek 25.7. $y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10\sin x$ *ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

homojen denklemin çözümü

$$m^2 - 2m - 3 = 0$$

karakteristik denkleminin çözümünden $m_1 = 3,\ m_2 = -1 \Rightarrow y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{-x}$ formundadır. Şimdi homojen olmayan terime gelelim:

$$2e^x - 10\sin x$$

fonksiyonu
(1)

$$e^x, \sin x, \cos x$$

UC fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazılmıştır. Buna göre UC kümeleri
(2)

$$\begin{aligned} S_1 &= \{e^x\} \\ S_2 &= \{\sin x, \cos x\} \end{aligned}$$

(3) Birbirine denk ve eşit küme olmadığından bu adımı geçelim.
(4) S_1 ve S_2 kümelerinin elemanları ile homojen kısmın fonksiyonları bir biri ile aynı değildir. Bu şıkkıda geçelim.
(5) 3 ve 4. durumlar sağlanmadığından bir sonraki durum.
(6) Özel fonksiyonu bu kümelerin oluşturmuş olduğu elemaların kombinasyonu şeklinde yazıldığını varsayalım:

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^x + B\sin x + C\cos x \Rightarrow \\ y_p' &= Ae^x + B\cos x - C\sin x \Rightarrow \\ y_p'' &= Ae^x - B\sin x - C\cos x \end{aligned}$$

denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} y'' - 2y' - 3y &= 2e^x - 10\sin x \Rightarrow Ae^x - B\sin x - C\cos x - 2\left(Ae^x + B\cos x - C\sin\right. \\ -3\left(Ae^x + B\sin x + C\cos x\right) &= 2e^x - 10\sin x \Rightarrow \\ -4Ae^x + (-4B + 2C)\sin x + (-4C - 2B)\cos x &= 2e^x - 10\sin x \\ -4A &= 2, \\ -4B + 2C &= -10 \\ -4C - 2B &= 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 2, C = -1 \\ y_p &= -\frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x \end{aligned}$$

özel çözüm ve

$$y = y_c + y_p = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x$$

genel çözümdür. □

Örnek 25.8. *$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$ ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

homojen denklemin çözümü

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

karakteristik denkleminin çözümünden $m_1 = 1,\ m_2 = 2 \Rightarrow y_c = c_1e^x + c_2e^{2x}$ formundadır. Şimdi homojen olmayan terime gelelim:

$$2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x}$$

fonksiyonu
(1)

$$x^2, e^x, xe^x, e^{3x}$$

UC fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazılmıştır. Buna göre UC kümeleri
(2)

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{x^2, x, 1\right\} \\ S_2 &= \{e^x\} \\ S_3 &= \{xe^x, e^x\} \\ S_4 &= \left\{e^{3x}\right\} \end{aligned}$$

(3) $S_2 \subset S_3$ olduğundan S_1, S_3, S_4 kümeleri ele alıncaktır.
(4) $S_3 = \{xe^x, e^x\}$ kümesi e^x fonksiyonunu içerdiğinden ve e^x fonksiyonu homojen denklemin çözümü içinde olduğundan S_3 kümesinin elemanlarını x ile çarpıp yeniden düzenleriz: $S_{3'} = \{x^2e^x, xe^x\}$ kümesinin elemanları ile özle çözümdeki fonksiyonlar aynı değildir.
(5) Yeniden düzenlenen kümeler sırasıyla:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{x^2, x, 1\right\} \\ S_{3'} &= \{x^2e^x, xe^x\} \\ S_4 &= \left\{e^{3x}\right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.
(6) Özel fonksiyonu bu kümelerin oluşturmuş olduğu elemaların kombinasyonu şeklinde yazıldığını varsayalım:

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^x + Exe^x + Fe^{3x} \Rightarrow \\ y_p' &= B + 2Ax + Ee^x + 2xDe^x + xEe^x + 3Fe^{3x} + x^2De^x \Rightarrow \\ y_p'' &= 2A + 2De^x + 2Ee^x + 4xDe^x + xEe^x + 9Fe^{3x} + x^2De^x \end{aligned}$$

denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} y'' - 3y' + 2y &= 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \Rightarrow 2A + 2De^x + 2Ee^x + 4xDe^x + xEe^x + 9Fe^{3x} + x^2De^x \\ &\quad -3\left(B + 2Ax + Ee^x + 2xDe^x + xEe^x + 3Fe^{3x} + x^2De^x\right) + 2Ax^2 + Bx + C + Dx^2 \\ +Exe^x + Fe^{3x} &= 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \Rightarrow (2A - 3B + 2C) + (2B - 6A)\,x + 2Ax^2 \\ +2De^{3x} - 2Exe^x + (2E - F)\,e^x &= 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \Rightarrow \\ 2A - 3B + 2C &= 0 \\ 2B - 6A &= 0 \\ 2A &= 2 \\ 2D &= 4 \\ -2E &= 2 \\ 2E - F &= 1 \Rightarrow A = 1, B = 3, C = \frac{7}{2}, F = -3, D = 2, E = -1 \Rightarrow \\ y_p &= x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2x^2e^x - xe^x - 3e^{3x} \end{aligned}$$

özel çözüm ve

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + \frac{7}{2} + 2x^2e^x - xe^x - 3e^{3x}$$

genel çözümdür. □

Örnek 25.9. *$y^{iv} + y'' = 3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$ ADD nin çözümünü bulunuz.*

Çözüm

$$y^{iv} + y'' = 0$$

homojen denklemin çözümü

$$m^4 + m^2 = 0$$

karakteristik denkleminin çözümünden $m_{1,2} = 0,\ m_{3,4} = \pm i \Rightarrow y_c = c_1 + c_2x + c_3\sin x + c_4\cos x$ formundadır.
Şimdi homojen olmayan terime gelelim:

$$3x^2 + 4\sin x - 2\cos x$$

fonksiyonu
(1)

$$x^2, \sin x, \cos x$$

UC fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak yazılmıştır. Buna göre UC kümeleri
(2)

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{x^2, x, 1\right\} \\ S_2 &= \{\sin x, \cos x\} \\ S_3 &= \{\cos x, \sin x\} \end{aligned}$$

(3) $S_2 = S_3$ olduğundan S_1, S_2 kümeleri ele alıncaktır.
(4) $S_1 = \left\{x^2, x, 1\right\}$ kümesi $x, 1$ fonksiyonlarını içerdiğinden ve $x, 1$ fonksiyonları homojen denklemin çözümü içinde olduğundan S_1 kümesinin elemanlarını x^2 ile çarpıp yeniden düzenleriz: $S_{1'} = \{x^4, x^3, x^2\}$. Böylece bu kümenin elemanları türdeş kısmın çözümündeki fonksiyonlardan farklıdır. Yine S_2 kümesinin elemanları, türdeş kısmın çözümünde olduğundan, elemanları x ile çarpalım: $S_{2'} = \{x \sin x, x \cos x\}$
(5) Yeniden düzenlenen kümeler sırasıyla:

$$\begin{aligned} S_{1'} &= \{x^4, x^3, x^2\} \\ S_{2'} &= \{x \sin x, x \cos x\} \end{aligned}$$

şeklindedir.
(6) Özel fonksiyonu bu kümelerin oluşturmuş olduğu elemaların kombinasyonu şeklinde yazıldığını varsayalım:

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx \sin x + Ex \cos x \Rightarrow \\ y_p' &= 2Cx + E \cos x + D \sin x + xD \cos x - xE \sin x + 4Ax^3 + 3Bx^2 \Rightarrow \\ y_p'' &= 2C + 6Bx + 2D \cos x - 2E \sin x - xE \cos x - xD \sin x + 12Ax^2 \Rightarrow \\ y_p''' &= 6B + 24Ax - 3E \cos x - 3D \sin x - xD \cos x + xE \sin x \Rightarrow \\ y_p^{iv} &= 24A - 4D \cos x + 4E \sin x + xE \cos x + xD \sin x \end{aligned}$$

denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} y^{iv} + y'' &= 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \Rightarrow 24A - 4D \cos x + 4E \sin x + xE \cos x + xD \sin x \\ & \quad +2C + 6Bx + 2D \cos x - 2E \sin x - xE \cos x - xD \sin x + 12Ax^2 \\ &= 3x^2 + 4 \sin x - 2 \cos x \\ 24A + 2C &= 0 \\ 6B &= 0 \\ 12A &= 3 \\ -2D &= -2 \\ 2E &= 4 \Rightarrow A = \frac{1}{4}, B = 0, C = -3, D = 1, E = 2 \\ y_p &= \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x \end{aligned}$$

özel çözüm ve

$$y = y_c + y_p = c_1 + c_2 x + c_3 \sin x + c_4 \cos x + \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + x \sin x + 2x \cos x$$

genel çözümdür. □

25.2. Parametrelerin Değişimi Metodu.

$$y\prime + a(x)\, y = b(x)$$

formundaki denklemlere lineer denklemini hatırlayalım. Denklemin

$$y\prime + a(x)\, y = 0$$

türdeş denklemine karşılık gelen çözümü

$$y = c\exp\left(-\int a(x)\,dx\right),$$

olarak elde etmiştik.
(10.1) in genel çözümünü

$$y = c(x)\exp\left(-\int a(x)\,dx\right).$$

formunda aramıştık ki bu teori olarak "parametrelerin değişimi metodu" dur. Yöntemi 2. mertebden değişken katsayılı bir ADD için anlatalım:

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x) = F(x) \tag{25.1}$$

denklemini ele alalım. y_1 ve y_2

$$a_0(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x) = 0 \tag{25.2}$$

homojen denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Bu durumda

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$$

(25.2) homojen denkleminin bir genel çözümüdür. Parametrelerin değişimi yönteminde c_1, c_2 sabitleri yerine fonksiyonlar düşünülür. Yani

$$y_p = v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x) \tag{25.3}$$

fonksiyonu (25.1) denkleminin bir çözümüdür. Burada $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonlarının ifadelerini bulmamız gerekmektedir. Elimizde 2 bilinmeyen var ve 1 koşul olarakda (25.3) fonksiyonunun çözüm olması var. Dolayısıyla 2. bir ek koşula ihtiyaç duyulmaktadır.

$$y_p' = v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x) + v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) \tag{25.4}$$

Burada y_p'' fonksiyonunu bulmadan önce daha önce bahsetmiş olduğumuz 2. koşul olarak

$$v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) = 0 \tag{25.5}$$

alalım. Şimdi fonksiyonun 2. türevini alırsak

$$y_p'' = v_1(x)\,y_1''(x) + v_2(x)\,y_2''(x) + v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x) \tag{25.6}$$

elde ederiz. (25.3) fonksiyonunun çözüm olduğundan $(25.3), (25.4), (25.6)$ ifadelerini (25.1) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
& a_0(x)\left[v_1(x)\,y_1''(x) + v_2(x)\,y_2''(x) + v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x)\right] + \\
& a_1(x)\left[v_1(x)\,y_1'(x) + v_2(x)\,y_2'(x)\right] + a_2(x)\left[v_1(x)\,y_1(x) + v_2(x)\,y_2(x)\right] \\
= \; & F(x) \Rightarrow \\
& \left\{\begin{array}{l} v_1(x)\left[a_0(x)\,y_1''(x) + a_1(x)\,y_1'(x) + a_2(x)\,y_1(x)\right] + \\ v_2(x)\left[a_0(x)\,y_2''(x) + a_1(x)\,y_2'(x) + a_2(x)\,y_2(x)\right] + a_0(x)\left[v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x)\right] \\ = F(x) \end{array}\right.
\end{aligned} \tag{25.7}$$

elde ederiz. y_1 ve y_2 homojen denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğundan $a_0(x)\,y_1''(x) + a_1(x)\,y_1'(x) + a_2(x)\,y_1(x) = 0$ ve $a_0(x)\,y_2''(x) + a_1(x)\,y_2'(x) + a_2(x)\,y_2(x)$ koşulları sağlanır. (25.7) de bunları dikkate alırsak

$$a_0(x)\left[v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x)\right] = F(x) \tag{25.8}$$

koşulunu elde ederiz.Böylece bilinmeyen $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonları için

$$\left\{\begin{array}{l} v_1'(x)\,y_1(x) + v_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ v_1'(x)\,y_1'(x) + v_2'(x)\,y_2'(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)} \end{array}\right. \tag{25.9}$$

denklem sistemini elde ederiz. Katsayılar determinantı

$$W\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

olarak elde ederiz. y_1 ve y_2 lineer bağımsız çözümler olduğundan Wronkiyen $W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0$ dır. Böylece (25.9) sisteminin tek çözümü vardır. Ve $v_1'(x)$ ve $v_2'(x)$ fonksiyonlarını

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{F(x)}{a_0(x)} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{F(x)\, y_2(x)}{a_0(x)\, W[y_1(x), y_2(x)]} \tag{25.10}$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{F(x)}{a_0(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{F(x)\, y_1(x)}{a_0(x)\, W[y_1(x), y_2(x)]} \tag{25.11}$$

Böylece (25.10) ve (25.11) de integral aldığımızda $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonlarını buluruz.

Örnek 25.10.

$$y'' + y = \tan x$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm Homojen kısmın çözümü

$$y_c = c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

olduğundan genel çözümü

$$y_p = v_1(x) \sin x + v_2(x) \cos x$$

olsun.

$$y_p' = v_1(x) \cos x - v_2(x) \sin x + v_1'(x) \sin x + v_2'(x) \cos x$$

Burada y_p'' fonksiyonunu bulmadan önce daha önce bahsetmiş olduğumuz 2. koşul olarak

$$v_1'(x) \sin x + v_2'(x) \cos x = 0$$

alalım. Şimdi fonksiyonun 2. türevini alırsak

$$y_p'' = -v_1(x) \sin x - v_2(x) \cos x + v_1'(x) \cos x - v_2'(x) \sin x$$

elde ederiz. Denklemde yerine yazarsak

$$v_1'(x) \cos x - v_2'(x) \sin x = \tan x$$

elde ederiz. Böylece bilinmeyen $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ fonksiyonları için

$$\begin{cases} v_1'(x) \sin x + v_2'(x) \cos x = 0 \\ v_1'(x) \cos x - v_2'(x) \sin x = \tan x \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz. Ve $v_1'(x)$ ve $v_2'(x)$ fonksiyonlarını

$$\begin{aligned} v_1'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \tan x & -\sin x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = \sin x \Rightarrow v_1(x) = -\cos x + c_3 \\ v_2'(x) &= \frac{\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \tan x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix}} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} \Rightarrow \\ v_2(x) &= \int (\cos x - \sec x)\, dx \underset{(77).intg}{=} \sin x - \ln(\sec x + \tan x) + c_4 \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Buna göre genel çözüm

$$\begin{aligned} y_p(x) &= v_1(x) \sin x + v_2(x) \cos x \\ &= (-\cos x + c_3) \sin x + (\sin x - \ln(\sec x + \tan x) + c_4) \cos x \\ &= c_3 \sin x + c_4 \cos x - \ln(\sec x + \tan x) \cos x \end{aligned}$$

olarak elde ederiz.

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p = c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 \sin x + c_4 \cos x - \ln(\sec x + \tan x) \cos x \\ &= A_3 \sin x + B \cos x - \ln(\sec x + \tan x) \cos x \end{aligned}$$

□

Örnek 25.11.

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^x$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm Homojen kısmın çözümü

$$\begin{aligned} m^3 - 6m^2 + 11m - 6 &= 0 \Rightarrow m_{1,2,3} = 1, 2, 3 \Rightarrow \\ y_c &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \end{aligned}$$

olduğundan genel çözümü

$$y_p = v_1(x) e^x + v_2(x) e^{2x} + v_3(x) e^{3x}$$

olsun.

$$y_p' = v_1(x) e^x + 2v_2(x) e^{2x} + 3v_3(x) e^{3x} + v_1'(x) e^x + v_2'(x) e^{2x} + v_3'(x) e^{3x}$$

2. koşul olarak

$$v_1'(x) e^x + v_2'(x) e^{2x} + v_3'(x) e^{3x} = 0$$

alalım. Şimdi fonksiyonun 2. türevini alırsak

$$y_p'' = v_1(x) e^x + 4v_2(x) e^{2x} + 9v_3(x) e^{3x} + v_1'(x) e^x + 2v_2'(x) e^{2x} + 3v_3'(x) e^{3x}$$

elde ederiz. 3. koşul olarak da

$$v_1'(x) e^x + 2v_2'(x) e^{2x} + 3v_3'(x) e^{3x} = 0$$

buluruz. 3. türevi de alırsak

$$y_p''' = v_1(x) e^x + 8v_2(x) e^{2x} + 27v_3(x) e^{3x} + v_1'(x) e^x + 4v_2'(x) e^{2x} + 9v_3'(x) e^{3x}$$

elde ederiz. Bunları denklemde yerine yazarsak

$$v_1'(x) e^x + 4v_2'(x) e^{2x} + 9v_3'(x) e^{3x} = e^x$$

elde ederiz. Böylece bilinmeyen $v_1(x), v_2(x)$ ve $v_3(x)$ fonksiyonları için

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1'(x) e^x + v_2'(x) e^{2x} + v_3'(x) e^{3x} = 0 \\ v_1'(x) e^x + 2v_2'(x) e^{2x} + 3v_3'(x) e^{3x} = 0 \\ v_1'(x) e^x + 4v_2'(x) e^{2x} + 9v_3'(x) e^{3x} = e^x \end{array} \right.$$

denklem sistemini elde ederiz. Ve $v_1'(x)$, $v_2'(x)$ ve $v_3'(x)$ fonksiyonlarını

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{x}e^{2x}e^{3x}}{2e^{x}e^{2x}e^{3x}} \Rightarrow v_1(x) = \frac{1}{2}x + c_4$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & 0 & e^{3x} \\ e^{x} & 0 & 3e^{3x} \\ e^{x} & e^{x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{-2e^{2x}e^{3x}}{2e^{x}e^{2x}e^{3x}} = -e^{-x} \Rightarrow v_2(x) = e^{-x} + c_5$$

$$v_3'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & 0 \\ e^{x} & 2e^{2x} & 0 \\ e^{x} & 4e^{2x} & e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{e^{2x}e^{2x}}{2e^{x}e^{2x}e^{3x}} = \frac{1}{2}e^{-2x} \Rightarrow v_3(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} + c_6$$

$$v_2(x) = \int (\cos x - \sec x)\, dx \underset{(77).intg}{=} \sin x - \ln(\sec x + \tan x) + c_4$$

: : : : 0 : olarak elde ederiz. Buna göre genel çözüm

$$\begin{aligned} y_p(x) &= v_1(x)e^{x} + v_2(x)e^{2x} + v_3(x)e^{3x} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + c_4\right)e^{x} + \left(e^{-x} + c_5\right)e^{2x} + \left(-\frac{1}{4}e^{-2x} + c_6\right)e^{3x} \\ &= \frac{1}{2}xe^{x} + c_4e^{x} + e^{x} + c_5e^{2x} - \frac{1}{4}e^{x} + c_6e^{3x} \end{aligned}$$

olarak elde ederiz. Buna göre genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{2}xe^{x} + c_4e^{x} + e^{x} + c_5e^{2x} - \frac{1}{4}e^{x} + c_6e^{3x} \\ &= Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{3x} + \frac{1}{2}xe^{x} \end{aligned}$$

buluruz. □

26. Cauchy-Euler denklemi

Tanım 26.1.

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}xy' + a_ny = 0 \tag{26.1}$$

denklemine Cauchy-Euler denklemi denir.

Teorem 26.2. *$x = e^t$ dönüşümü ile (26.1) denklemi sabit katsayılı lineer denkleme dönüşür.*

Örnek 26.3.

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm $x = e^t$ dönüşümü ile

$$\begin{aligned} t &= \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \end{aligned}$$

denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} x^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-2x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+2y &= x^3 \Rightarrow \\ \frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y &= e^{3t} \Rightarrow \\ y_c &= c_1e^t+c_2e^{2t} \end{aligned}$$

özel çözümü belirsiz katsayılar ile çözelim:

$$y_p = Ae^{3t}$$

olarak arayalım. Bunu denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 9Ae^{3t}-9Ae^{3t}+2Ae^{3t} &= e^{3t} \Rightarrow A=\frac{1}{2} \Rightarrow y_p=\frac{1}{2}e^{3t} \Rightarrow \\ y &= y_c+y_p = c_1e^t+c_2e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t} \underset{x=e^t}{\Rightarrow} \\ y &= c_1x+c_2x^2+\frac{1}{2}x^3 \end{aligned}$$

□

Örnek 26.4.

$$x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\ln x$$

ADD nin çözümünü bulunuz.

Çözüm $x=e^t$ dönüşümü ile

$$\begin{aligned} t &= \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\frac{dt}{dx}-\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right)-\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-\frac{d^2y}{dt^2}\right)-\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right) \end{aligned}$$

denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} x^3\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)-4x^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+8x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}-8y &= 4t \Rightarrow \\ \frac{d^3y}{dt^3}-7\frac{d^2y}{dt^2}+14\frac{dy}{dt}-8y &= 4t \Rightarrow \\ y_c &= c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{4t} \end{aligned}$$

özel çözümü belirsiz katsayılar ile çözelim:

$$y_p = At+B$$

olarak arayalım. Bunu denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 14A-8At-8B &= 4t \Rightarrow A=-\frac{1}{2}, B=-\frac{7}{8} \Rightarrow y_p=-\frac{1}{2}t-\frac{7}{8} \Rightarrow \\ y &= y_c+y_p=c_1e^t+c_2e^{2t}+c_3e^{4t}-\frac{1}{2}t-\frac{7}{8} \underset{x=e^t}{\Rightarrow} \\ y &= c_1x+c_2x^2+c_3x^4-\frac{1}{2}\ln x-\frac{7}{8} \end{aligned}$$

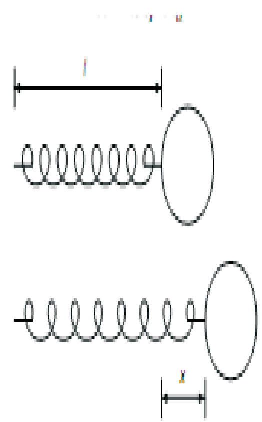
□

CHAPTER 6

Sabit katsayılı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

27. Salınım Hareketi

Sistem denge konumunda bir miktar aşağı doğru çekilir ve bırakılırsa gidip-gelme hareketi yapar. Buna salınım hareketi vey titreşim hareketi denir. Hava direnci ihmal edilirse, bir başka deyişle sürtünme kuvveti yok kabul edilirse, cisim yukarıda ve aşağıda aynı limitler arasında bir gidip-gelme hareketi yapıcaktır. Buna *basit harmonik hareket* denir. Eğer sürtünme varsa cismin salınım genliği gittikçe azalıcak ve cisim bir süre denge konumuna gelicektir. Cismin bu tür hareketine *serbest sönümlü harmonik hareket*i denir. Bunun yanı sıra, cisme devamlı ve sinusoidal bir fonksiyonla ifade edilebilen bir harmonik etki verilebilir. Bu durumda cismin hareketi *zorlanmış sönümlü harmonik hareket*tir.



1: Basit Harmonik Hareket

Hooke yasasına göre çekilen ve bırakılan bir yayın büyüklüğü, yayın uzama miktarı ile orantılı bir geri çağrıcı kuvvettir. Buna göre kuvveti,

$$F = -kx$$

ile gösteririz. Buna göre diferansiyel denklem

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0 x = 0,\ \omega_0 = \frac{k}{m}$$

olarak verilir.

2: Serbest Sönümlü Harmonik Hareket

Denge konumundan x uzaklığında buluna bir cisme etki eden söndürücü kuvvetin büyüklüğü

$$b\frac{dx}{dt}$$

ile verilir. $b > 0$ sabittir ve söndürme katsayısı olarak adlandırılır. Söndürücü kuvvetin yönü, cismin hareket yönüne zıttır. Buna göre diferansiyel denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

olarak veririz.

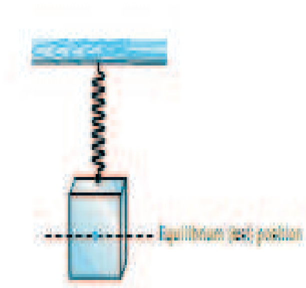
3: Zorlanmış Sönümlü Harmonik Hareket

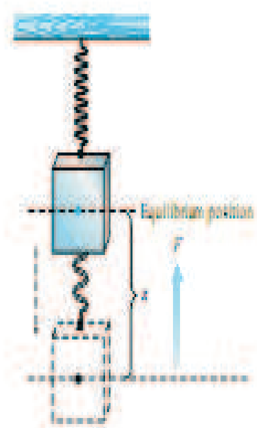
Dışarıdan verilen bir kuvvet ile birlikte diferansiyel denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F\left(t\right)$$

olarak yazarız.

Örnek 27.1. *Bir ucundan tavana asıl duran bir yayın diğer ucuna $m=2kg$ ağırlığında bir cisim asıldığı zaman yay $20cm$ uzuyor. Denge konumunda $6cm$ uzaklığa çekilip başlangıç anında ilk hızsız olarak serbest bırakılan cimin*





(1) sürtünme kuvveti ihmal edilerek $10s$ sonraki hızını ve hangi uzaklıkta olduğunu bulunuz.
(2) Sürtünme kuvveti cismin hızının 4 katı ve devamlı olarak cisme etki eden kuvvet $\cos t$ olduğunda cismin $10s$ sonraki hızı ve hangi uzaklıkta olduğunu bulunuz. Burada $g=9.8m/s^2$ olarak alınız.

Çözüm

(1)
$$k\Delta x=mg\Rightarrow k*0.2m=2kg*9.8m/s^2\Rightarrow k=98N/m$$
yayın esneklik katsayısıdır.
$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx\Rightarrow 2\frac{d^2x}{dt^2}=-98x\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+49x=0\Rightarrow m^2+49=0\Rightarrow m_{1,2}=\pm 7i \\ x\left(t\right) &= c_1\cos 7t+c_2\sin 7t\Rightarrow \\ x\left(0\right) &= 0.06\Rightarrow c_1=0.06 \end{aligned}$$
ilk hızsız olması ise
$$\begin{aligned} v\left(0\right) &= x'\left(0\right)=0\Rightarrow x'\left(t\right)=-0.42\sin t+7c_2\cos 7t\Rightarrow x'\left(0\right)=0 \\ 7c_2 &= 0\Rightarrow c_2=0\Rightarrow \\ x\left(t\right) &= 0.06\cos 7t\Rightarrow x\left(10\right)=0.06*\cos\left(70^{\circ}\right)=2.052\,1\times 10^{-2} \end{aligned}$$

(2)

$$\Rightarrow 2\frac{d^2x}{dt^2} = -4\frac{dx}{dt} - 98x + \cos t \Rightarrow 2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 98x = \cos t$$

önce homojen denklemi çözelim

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 98x = 0 \Rightarrow 2m^2 + 4m + 98 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 7 = 0 \\ &\Rightarrow \quad m_{1,2} = \pm i\sqrt{6} - 1 \Rightarrow x_c(t) = e^{-t}\left(c_1 \cos\sqrt{6}t + c_2 \sin\sqrt{6}t\right) \end{aligned}$$

şimdi gelelim homojen olmayan denklemin özel çözümüne UC yöntemini kullanırsak:

$$\Rightarrow \quad u_1 = \cos t \Rightarrow S_1 = \{\cos t, \sin t\} \Rightarrow x_p(t) = A\cos t + B\sin t \Rightarrow x_p' = -A\sin t + B\cos t \Rightarrow x_p'' = -A\cos t - B\sin t$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 98x = \cos t \Rightarrow 2(-A\cos t - B\sin t) + 4(-A\sin t + B\cos t) + 98(A\cos t + B\sin t) = \cos t$$

$$\Rightarrow \quad (96A + 4B)\cos t + (-4A + 96B)\sin t = \cos t \Rightarrow \begin{array}{c} 96A + 4B = 1 \\ -4A + 96B = 0 \end{array} \Rightarrow A = \frac{6}{577}, B = \frac{1}{2308}$$

$$\Rightarrow \quad x_p(t) = \frac{6}{577}\cos t + \frac{1}{2308}\sin t$$

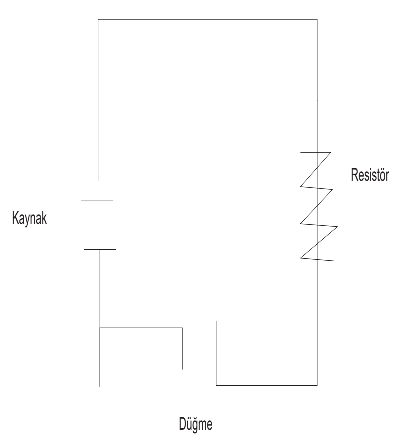
Buna göre çözüm

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t}\left(c_1\cos\sqrt{6}t + c_2\sin\sqrt{6}t\right) + \frac{6}{577}\cos t + \frac{1}{2308}\sin t \\ x(0) &= 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{6}{577} \\ x'(0) &= 0 \Rightarrow c_2\sqrt{6} = -\frac{1}{2308} \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{13\,848}\sqrt{6} \\ x(t) &= e^{-t}\left(\frac{6}{577}\cos\sqrt{6}t - \frac{1}{13\,848}\sqrt{6}\sin\sqrt{6}t\right) + \frac{6}{577}\cos t + \frac{1}{2308}\sin t \end{aligned}$$

□

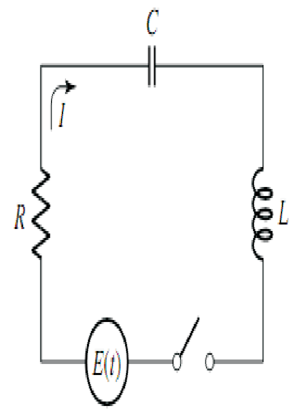
28. Elektrik Devre Problemleri

En basit elektrik devreleri, jeneratör veya pil gibi elektrik kaynağı ve enerjiyi kullanan bir rezistör (örneğin elektrik ampülü) (resistance) bulunan bir seri devredir. Eğer düğme kapatılırsa bir I akımı rezistöre doğru akacak ve bir voltaj düşmesine sebep olucaktır. Yani rezistörün iki ucundaki potansiyel farklı olucaktır. Bu potansiyel farkı veya voltaj düşüşü ise Voltmetre denilen bir elt ile ölçülebilir. Eketrik devrelerindeki basit bir



kural Kirchoff kuralı olarak adalandırılır, Bu kurala göre, elektrik devresindeki tüm voltajların toplamı, toplam kuvvete eşittir. Toplam kuvveti $E(t)$ ile gösterirsek (emf-electromotive force)

$$V_L + V_R + V_C = E(t)$$



$$V_L + V_R + V_C = E\left(t\right)$$

R rezistör (reistance), C kapasitör (capacitor), I indüktör (ınductor). $I = I\left(t\right)$ elektrik devresindeki akımı ve $q = q\left(t\right)$ kapasitördeki ani elektrik yükünü göstermek üzere

$$q' = I$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Ohm kanununa göre rezistör üzerindeki voltaj düşüklüğü akım ile doğru orantılıdır:

$$V_R = RI$$

burada R rezistörün direncidir ve sabittir. Kapasitördeki voltaj düşüşü ise kapasitördeki elektrik yükü ile orantılıdır ve

$$V_C = \frac{1}{C}q$$

olarak verilir. Burada C kapasitanstır (capacidance). Son olarak indüktördeki voltaj düşüşü ise akımın değişim hızı ile orantılıdır:

$$V_L = LI'$$

L sabitine indiktörün indüktansı denir (henry ile ölçülür) (inductance). Kirchoff kuralına göre

$$LI' + \frac{1}{C}q + RI = E\left(t\right)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada türev alırsak ve

$$q' = I$$

ifadesine göre

$$\begin{aligned} Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q &= E\left(t\right) \\ LI'' + \frac{1}{C}q' + RI' &= E'(t) \Rightarrow \\ LI'' + RI' + \frac{1}{C}I &= E'(t) \Rightarrow \end{aligned}$$

2.mertebeden denklemi RCL denklemi olarak adalndırılır.

Örnek **28.1.** *Direnci* 10Ω *olan bir direnç teli ve öz indüksiyon katsayısı* $L = 0.2$ *henry olan bir bobin, elektromotor kuvveti 40 volt ve kapasitansı olmayan bir doğru akım üretecine seri olarak bağlanıyor. Başlangıçta akım ve elektrik yükü olmadığına göre.herhangi zamandaki elektrik yükünü ve akımı bulunuz.*

Çözüm Yukarıdaki denklem göre

$$\begin{aligned} R &= 10\Omega, L = 0.2, E\left(t\right) = 40, V_C \to yok \Rightarrow \\ 0.2q'' + 10q' &= 40 \Rightarrow m^2 + 50m = 0 \Rightarrow m_1 = 0,\ m_2 = -50 \Rightarrow \\ q_c\left(t\right) &= c_1 + c_2 e^{-50t} \end{aligned}$$

özel çözüm için:

$$\begin{aligned}
u_1 &= 1, S_1 = \{1\} \Rightarrow S_1' = \{t\} \Rightarrow q_p(t) = At \Rightarrow 50A = 40 \Rightarrow A = \frac{4}{5} \Rightarrow \\
q_p(t) &= \frac{4}{5}t \Rightarrow q(t) = c_1 + c_2 e^{-50t} + \frac{4}{5}t \\
q(0) &= 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0, I = q' = -50c_2 e^{-50t} + \frac{4}{5} \Rightarrow I(0) = 0 \Rightarrow 50c_2 = \frac{4}{5} \Rightarrow c_2 = \frac{4}{250} \Rightarrow c_1 = -\frac{4}{250} \\
q(t) &= \frac{4}{250}\left(e^{-50t} - 1\right) + \frac{4}{5}t,\ I(t) = \frac{4}{5}\left(1 - e^{-50t}\right)
\end{aligned}$$

□

CHAPTER 7

Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri

Şu ana kadar bir bilinmeyenli bir diferansiyel denklemleri inceledik. Şimdi ise iki bilinmeyen fonksiyonu bulunan iki diferansiyel denklemi ve genel olarak n bilinmeyen fonksiyonu bulunan n diferansiyel denklemi inceleyeceğiz. Daha önce *Diferansiyel denklem sistemleri*ni tanıtmak ile başlayalım.

29. Lineer sistem türleri (İki bilinmeyenli iki denklem)

x ve y bilinmeyen fonkiyonlar olmak üzere 1. mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemi genel olarak,

$$\begin{aligned} a_1(t)\,x' + a_2(t)\,y' + a_3(t)\,x + a_4(t)\,y &= F_1(t) \\ b_1(t)\,x' + b_2(t)\,y' + b_3(t)\,x + b_4(t)\,y &= F_2(t) \end{aligned} \tag{29.1}$$

şeklinde yazılır. Burada t bağımsız değişkendir.

Örnek 29.1.

$$\begin{aligned} 2x' + 3y' - 2x + y &= t^2 \\ x' - 3y' + 3x + 4y &= e^t \end{aligned}$$

1. mertebeden, sabit katsayılı bir sistemdir.

x ve y bilinmeyen fonkiyonlar olmak üzere 2. mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem sistemi genel olarak,

$$\begin{aligned} a_1(t)\,x'' + a_2(t)\,y'' + a_3(t)\,x' + a_4(t)\,y' + a_5(t)\,x + a_6(t)\,y &= F_1(t) \\ b_1(t)\,x'' + b_2(t)\,y'' + b_3(t)\,x' + b_4(t)\,y' + b_5(t)\,x + b_6(t)\,y &= F_2(t) \end{aligned} \tag{29.2}$$

şeklinde yazılır.
(29.1) sistemini özel olarak

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y + F_1(t) \\ y' &= a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y + F_2(t) \end{aligned} \tag{29.3}$$

yazılır ve bu forma *Normal form* denir.

Örnek 29.2.

$$\begin{aligned} x' &= t^2x + (t+1)\,y + t^3 \\ y' &= te^tx + t^3y - e^t \end{aligned}$$

1. mertebeden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemi ve

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 7y + t^2 \\ y' &= 2x - 3y + 2t \end{aligned}$$

1. mertebeden, sabit katsayılı bir sistemdir.

n sayıda diferansiyel denklemden oluşan sistemi genel olarak,

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \cdots + a_{1n}(t)\,x_n + F_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \cdots + a_{2n}(t)\,x_n + F_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \cdots + a_{nn}(t)\,x_n + F_n(t) \end{aligned} \tag{29.4}$$

şeklinde yazılır.

30. Diferansiyel operatörler

Burada sabit katsayılı bir lineer diferansiyel denklem sistemi için sembolik *diferansiyel operatör yöntemini* ele alacağız.

$$\frac{dx}{dt} = x' = Dx$$

şekilde yazılabilir.n. mertebeden diferansiyel operatör

$$\frac{d^n x}{dt^n} = x^{(n)} = D^n x$$

şekilde yazılabilir.

Örnek 30.1. (i)

$$(D+c)\,x \Leftrightarrow x' + cx,\ \ c \ sabit$$

(ii)

$$(aD^n + bD^m)\,x \Leftrightarrow ax^{(n)} + bx^{(m)},\ \ a, b \ sabitler$$

(iii)

$$\left(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n\right) x \Leftrightarrow a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x,\ \ a_0, a_1, \ldots, a_n \ sabitler$$

Örnek 30.2. *$x(t) = t^3$ fonksiyonu için $\left(3D^2 + 5D - 2\right) x$ ifadesini bulunuz.*

$$\left(3D^2 + 5D - 2\right) x = 3\frac{\mathrm{d}^2\left(t^3\right)}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}\left(t^3\right)}{\mathrm{d}t} - 2t^3 = 18t + 15t^2 - 2t^3$$

Şimdi daha genel olarak,

$$L \equiv a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

yazalım. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sabitlerdir.

Teorem 30.3. *c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere*

$$L\left[c_1 f + c_2 g\right] = c_1 L\left[f\right] + c_2 L\left[g\right]$$

Örnek 30.4.

$$L \equiv 3D^2 + 5D - 2$$

olsun. $f = t^2, g = \sin t$ için

$$L\left[3f + 2g\right] = 3L\left[f\right] + 2L\left[g\right]$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
L\left[3f+2g\right] &= 3\frac{d^2}{dt^2}\left(3t^2 + 2\sin t\right) + 5\frac{d}{dt}\left(3t^2 + 2\sin t\right) - 2\left(3t^2 + 2\sin t\right) \\
&= 30t + 10\cos t - 10\sin t - 6t^2 + 18 \\
L\left[f\right] &= 3\frac{d^2}{dt^2}\left(t^2\right) + 5\frac{d}{dt}\left(t^2\right) - 2\left(t^2\right) \\
&= -2t^2 + 10t + 6 \\
L\left[g\right] &= 3\frac{d^2}{dt^2}\left(\sin t\right) + 5\frac{d}{dt}\left(\sin t\right) - 2\left(\sin t\right) \\
&= 5\cos t - 5\sin t \Rightarrow \\
3L\left[f\right] + 2L\left[g\right] &= 3\left(-2t^2 + 10t + 6\right) + 2\left(5\cos t - 5\sin t\right) \\
&= 30t + 10\cos t - 10\sin t - 6t^2 + 18 \Rightarrow \\
L\left[3f+2g\right] &= 3L\left[f\right] + 2L\left[g\right]
\end{aligned}$$

□

31. Sabit katsayılı lineer sistemler için operatör yöntemi

Şimdi sabit katsayılı lineer sistemler için operatör yöntemini açıklayacağız.

$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= f_1(t) \\ L_3x + L_4y &= f_2(t) \end{aligned} \tag{31.1}$$

lineer sistemini ele alalım. Burada L_1, L_2, L_3, L_4 sabit katsayılı lineer operatörleri aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv a_0D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n \\ L_2 &\equiv b_0D^m + b_1D^{m-1} + \cdots + b_{m-1}D + b_m \\ L_3 &\equiv c_0D^p + c_1D^{p-1} + \cdots + c_{p-1}D + c_p \\ L_4 &\equiv d_0D^q + d_1D^{q-1} + \cdots + d_{q-1}D + d_q \end{aligned}$$

ve a_i, b_i, c_i, d_i katsayıları sabittir.

Örnek 31.1.

$$\begin{aligned} 2x' - 2y' - 3x &= t \\ 2x' + 2y' + 3x + 8y &= 2 \end{aligned}$$

lineer sistemini

$$\begin{aligned} (2D-3)x - 2Dy &= t \\ (2D+3)x + (2D+8)y &= 2 \end{aligned}$$

ile gösterebiliriz. Buna göre L_1, L_2, L_3, L_4 sabit katsayılı lineer operatörleri aşağıdaki formdadır:

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv 2D-3 \\ L_2 &\equiv -2D \\ L_3 &\equiv 2D+3 \\ L_4 &\equiv 2D+8 \end{aligned}$$

Yöntem

(31.1) sisteminde 1.denklem L_4 operatörü ile çarpılır, 2. denklem ise L_2 operatörü ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılır:

$$\begin{aligned} L_4L_1x + L_4L_2y &= L_4f_1(t) \\ L_2L_3x + L_2L_4y &= L_2f_2(t) \\ \Rightarrow \quad (L_4L_1 - L_2L_3)x &= L_4f_1(t) - L_2f_2(t) \end{aligned} \tag{31.2}$$

sabit katsayılı, tek bilinmeyenli lineer ADD elde edilir. Bölüm 5'daki yöntemler kullanılarak çözüm bulunur. Benzer şekilde bilinmeyen y fonksiyonunu bulmak için ise (31.1) sisteminde 1.denklem L_3 operatörü ile çarpılır, 2. denklem ise L_1 operatörü ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılır:

$$\begin{aligned} L_3L_1x + L_3L_2y &= L_3f_1(t) \\ L_1L_3x + L_1L_4y &= L_1f_2(t) \\ \Rightarrow \quad (L_3L_2 - L_1L_4)y &= L_3f_1(t) - L_1f_2(t) \end{aligned} \tag{31.3}$$

Örnek 31.2.

$$\begin{aligned} 2x' - 2y' - 3x &= t \\ 2x' + 2y' + 3x + 8y &= 2 \end{aligned}$$

lineer sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Lineer sistemi operatör formu ile

$$\begin{aligned} (2D-3)x - 2Dy &= t \\ (2D+3)x + (2D+8)y &= 2 \end{aligned}$$

şeklinde gösterebiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned}
&(2D+8)\,/\ \ (2D-3)\,x-2Dy=t\\
&2D\ /\ \ (2D+3)\,x+(2D+8)\,y=2\\
\Rightarrow\quad &[(2D+8)(2D-3)+2D(2D+3)]\,x=(2D+8)\,t+2D(2)\\
\Rightarrow\quad &\left(16D+8D^2-24\right)x=8t+2\\
\Rightarrow\quad &\left(D^2+2D-3\right)x=t+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

öncelikle homojen denklemin çözümünü bulalım:

$$\left(D^2+2D-3\right)x=0$$

karakteristik denklemi

$$m^2+2m-3=0\Rightarrow m_1=-3,m_2=1$$

ve genel çözümü

$$x_c=c_1e^{-3t}+c_2e^t$$

olarak elde ederiz. Özel çözüm için

$$x_p=at+b$$

formunda arayalım:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad &\frac{d^2}{dt^2}(at+b)+2\frac{d}{dt}(at+b)-3(at+b)=t+\frac{1}{4}\\
\Rightarrow\quad &2a-3b-3at=t+\frac{1}{4}\\
\Rightarrow\quad &\begin{array}{l}2a-3b=\frac{1}{4}\\ -3a=1\end{array}\ \Rightarrow a=-\frac{1}{3},b=-\frac{11}{36}\\
\Rightarrow\quad &x(t)=x_c+x_p=c_1e^{-3t}+c_2e^t-\frac{1}{3}t-\frac{11}{36}
\end{aligned}$$

y çözümünü bulmak için de benzer şekilde

$$\begin{aligned}
&-(2D+3)\,/\ \ (2D-3)\,x-2Dy=t\\
&(2D-3)\ \ /\ \ (2D+3)\,x+(2D+8)\,y=2\\
\Rightarrow\quad &[(2D+3)\,2D+(2D-3)(2D+8)]\,y=-(2D+3)\,t+(2D-3)(2)\\
\Rightarrow\quad &\left(16D+8D^2-24\right)x=3t-8\\
\Rightarrow\quad &\left(D^2+2D-3\right)x=-\frac{3}{8}t-1
\end{aligned}$$

öncelikle homojen denklemin çözümünü bulalım:

$$\left(D^2+2D-3\right)y=0$$

karakteristik denklemi

$$m^2+2m-3=0\Rightarrow m_1=-3,m_2=1$$

ve genel çözümü

$$y_c=k_1e^{-3t}+k_2e^t$$

olarak elde ederiz. Özel çözüm için

$$y_p=at+b$$

formunda arayalım:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad &\frac{d^2}{dt^2}(at+b)+2\frac{d}{dt}(at+b)-3(at+b)=\frac{3}{8}t-1\\
\Rightarrow\quad &2a-3b-3at=\frac{3}{8}t-1\\
\Rightarrow\quad &\begin{array}{l}2a-3b=-1\\ -3a=-\frac{3}{8}\end{array}\ \Rightarrow a=\frac{1}{8},b=\frac{5}{12}\\
\Rightarrow\quad &y(t)=y_c+y_p=k_1e^{-3t}+k_2e^t+\frac{1}{8}t+\frac{5}{12}
\end{aligned}$$

Şimdi c_1, c_2, k_1, k_2 katsayılarının seçimini belirleyelim:

$$\begin{aligned}
2x' - 2y' - 3x &= t \Rightarrow \\
& 2\frac{d}{dt}\left(c_1e^{-3t} + c_2e^{t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}\right) \\
& -2\frac{d}{dt}\left(k_1e^{-3t} + k_2e^{t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12}\right) \\
-3\left(c_1e^{-3t} + c_2e^{t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}\right) &= t \Rightarrow \\
\left(-c_1 - 2k_1\right)e^{t} + \left(-9c_2 + 6k_2\right)e^{-3t} &= 0 \\
\begin{matrix} -c_1 - 2k_1 = 0 \\ -9c_2 + 6k_2 = 0 \end{matrix} &\Rightarrow \begin{matrix} c_1 = -2k_1 \\ c_2 = \frac{2}{3}k_2 \end{matrix} \Rightarrow \\
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1e^{-3t} + c_2e^{t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36} \\ k_1e^{-3t} + k_2e^{t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2k_1e^{-3t} + \frac{2}{3}k_2e^{t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36} \\ k_1e^{-3t} + k_2e^{t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

Alternatif Yöntem

Diğer yöntem gibi öncelikli olarak $x(t)$ çözümü bulunur. $y(t)$ çözümünü bulmak için, (31.1) sisteminde y nin türevini içeren terim yok olucak şekilde yeni bir bağıntı eldeedilip $y(t)$ çözümü elde edilir.

Örnek 31.3.

$$\begin{aligned} 2x' - 2y' - 3x = t \\ 2x' + 2y' + 3x + 8y = 2 \end{aligned}$$

lineer sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Bir önceki örnekten

$$\Rightarrow x(t) = x_c + x_p = c_1e^{-3t} + c_2e^{t} - \frac{1}{3}t - \frac{11}{36}$$

olarak elde etmiştik. y çözümünü bulmak için

$$\begin{aligned} 2x' - 2y' - 3x = t \\ 2x' + 2y' + 3x + 8y = 2 \end{aligned}$$

sisteminde y' yok olacak şekilde düzenleme yapalım: Sistemi taraf tarafa topladığımda

$$\begin{aligned} 4x' + 8y &= t + 2 \Rightarrow \\ y &= \frac{t + 2 - 4x'}{8} \end{aligned}$$

aranan çözümdür.

$$\begin{aligned} y &= \frac{t + 2 - 4\left(-3c_1e^{-3t} + c_2e^{t} - \frac{1}{3}\right)}{8} \\ &= -\frac{3}{2}c_1e^{-3t} - \frac{1}{2}c_2e^{t} + \frac{1}{8}t + \frac{5}{12} \end{aligned}$$

□

Örnek 31.4.

$$\begin{aligned} x' - y' - 2x + 4y = t \\ x' + y' - x - y = 1 \end{aligned}$$

lineer sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Lineer sistemi operatör formu ile

$$\begin{aligned} (D-2)\,x-(D-4)\,y&=t\\ (D-1)\,x+(D-1)\,y&=1 \end{aligned}$$

şeklinde gösterebiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned} &(D-1)\,/\;\;(D-2)\,x-(D-4)\,y=t\\ &(D-4)\;\;/\;\;(D-1)\,x+(D-1)\,y=1\\ \Rightarrow\;\; &[(D-1)\,(D-2)+(D-4)\,(D-1)]\,x=(D-1)\,t+(D-4)\,(1)\\ \Rightarrow\;\; &\left(2D^2-8D+6\right)x=-t-3 \end{aligned}$$

öncelikle homojen denklemin çözümünü bulalım:

$$\left(2D^2-8D+6\right)x=0$$

karakteristik denklemi

$$m^2-4m+3=0\Rightarrow m_1=3,m_2=1$$

ve genel çözümü

$$x_c=c_1e^{3t}+c_2e^t$$

olarak elde ederiz. Özel çözüm için

$$x_p=at+b$$

formunda arayalım:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\;\; & 2\frac{d^2}{dt^2}\,(at+b)-8\frac{d}{dt}\,(at+b)+6\,(at+b)=-t-3\\ \Rightarrow\;\; & 6b-8a+6at=-t-3\\ \Rightarrow\;\; & \begin{array}{l} 6b-8a=-3\\ 6a=-1 \end{array}\;\;\Rightarrow a=-\frac{1}{6},b=-\frac{13}{18}\\ \Rightarrow\;\; & x\,(t)=x_c+x_p=c_1e^{3t}+c_2e^t-\frac{1}{6}t-\frac{13}{18} \end{aligned}$$

Şimdi y çözümünü bulalım:

$$\begin{aligned} x'-y'-2x+4y&=t\\ x'+y'-x-y&=1 \end{aligned}$$

denklem siteminde y' li terimi yok edersek:

$$\begin{aligned} \Rightarrow\;\; & 2x'-3x+3y=t+1\Rightarrow y=\frac{2x'-3x-t-1}{3}\\ \Rightarrow\;\; & y=\frac{2\frac{d}{dt}\left(c_1e^{3t}+c_2e^t-\frac{1}{6}t-\frac{13}{18}\right)-3\left(c_1e^{3t}+c_2e^t-\frac{1}{6}t-\frac{13}{18}\right)-t-1}{3}\\ \Rightarrow\;\; & y=c_1e^{3t}-\frac{1}{3}c_2e^t-\frac{1}{6}t+\frac{5}{18} \end{aligned}$$

□

32. Normal Formda lineer denklem sistemleri (İki bilinmeyenli iki denklem)

Tanım 32.1.

$$\begin{aligned} x'&=a_{11}\,(t)\,x+a_{12}\,(t)\,y+F_1\,(t)\\ y'&=a_{21}\,(t)\,x+a_{22}\,(t)\,y+F_2\,(t) \end{aligned}\tag{32.1}$$

sistemine homojen olmayan, iki bilinmeyenli sistem denir.

$$F_1\,(t)=0,\;\;F_2\,(t)=0$$

durumunda sisteme homojen sistem denir.

Örnek 32.2.

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= 3x + 6y \end{aligned}$$

homojen sistemdir ve

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - 5t \\ y' &= 3x + 6y - 4 \end{aligned}$$

homojen olmayan sistemdir.

Teorem 32.3. *$a_{11}(t), a_{12}(t), a_{21}(t), a_{22}(t), F_1(t), F_2(t)$ fonksiyonları sürekli fonksiyonlar ise (32.1) sisteminin bir tek*

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}$$

çözümü vardır.

32.1. Homojen lineer sistemler için temel özellikler.

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(t)\,x + a_{12}(t)\,y \\ y' &= a_{21}(t)\,x + a_{22}(t)\,y \end{aligned} \tag{32.2}$$

homojen sistemini ele alalım.

Tanım 32.4.

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= g_1(t) \end{aligned} \quad ve \quad \begin{aligned} x &= f_2(t) \\ y &= g_2(t) \end{aligned}$$

fonksiyonları (32.2) sisteminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix}$$

determinantına bu fonksiyonların Wronskian'ı denir ve $W(t)$ ile gösterilir.

Teorem 32.5.

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= g_1(t) \end{aligned} \quad ve \quad \begin{aligned} x &= f_2(t) \\ y &= g_2(t) \end{aligned}$$

fonksiyonları (32.2) sisteminin lineer bağımsız çözümleri olması için gerek ve yeter koşul

$$W(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ g_1(t) & g_2(t) \end{vmatrix} \neq 0$$

olmasıdır.

Teorem 32.6.

$$\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= g_1(t) \end{aligned} \quad ve \quad \begin{aligned} x &= f_2(t) \\ y &= g_2(t) \end{aligned}$$

fonksiyonları (32.2) sisteminin lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x &= c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\ y &= c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) \end{aligned}$$

fonksiyonuna sistemin genel çözümü denir.

Örnek 32.7.

$$\begin{aligned} x &= e^{5t} \\ y &= -3e^{5t} \end{aligned} \quad ve \quad \begin{aligned} x &= e^{3t} \\ y &= -e^{3t} \end{aligned}$$

fonksiyonları

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y \\ y' &= 3x + 6y \end{aligned}$$

homojen sisteminin lineer bağımsız bir çözümleri olduğunu gösteriniz. Buna göre genel çözümü belirtiniz.

Çözüm

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{5t} & e^{3t} \\ -3e^{5t} & -e^{3t} \end{vmatrix} = 2e^{8t} \neq 0$$

olduğundan lineer bağımsızdır.

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{5t} + c_2 e^{3t} \\ y(t) &= -3c_1 e^{5t} - c_2 = 0 \end{aligned}$$

fonksiyonu genel çözümdür. □

32.2. Sabit katsayılı homojen lineer sistemler.

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{32.3}$$

homojen sistemini ele alalım. Sabit katsayılı homojen denklemin çözümünü

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda t} \\ y &= Be^{\lambda t} \end{aligned} \tag{32.4}$$

olarak arayalım. Buna göre

$$\begin{aligned} x' &= A\lambda e^{\lambda t} \\ y' &= B\lambda e^{\lambda t} \end{aligned}$$

türevlerini (32.3) sisteminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} A\lambda e^{\lambda t} &= a_{11}Ae^{\lambda t} + a_{12}Be^{\lambda t} \\ B\lambda e^{\lambda t} &= a_{21}Ae^{\lambda t} + a_{22}Be^{\lambda t} \end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. $e^{\lambda t} \neq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) A + a_{12}B &= 0 \\ a_{21}A + (a_{22} - \lambda) B &= 0 \end{aligned} \tag{32.5}$$

sistemi elde edilir. Sistemin sıfırdan farklı çözümün olması için

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{32.6}$$

olması gerekir. Buna göre

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \tag{32.7}$$

denklemini elde ederiz.

Tanım **32.8.** *$(32.7)'$e diferansiyel sistemin karakteristik denklemi denir. Bu denklem 2'inci dereceden bir cebirsel denklem olduğuna göre, denklemin λ_1, λ_2, gibi 2 tane kökü olmalıdır. Bu kökler birer birer denklem (32.3)'da yerine konursa her defasında bir özel çözüm elde edilecektir. Buna göre denklemin köklerine göre çözümü irdeleyelim.*

32.2.1. *1.Durum: Ayrık Reel kökler.*

Teorem **32.9.** *λ_1 ve λ_2, $(32.7)'$e karakteristik denklemin ayrık reel kökleri olsun.*

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 t} \\ y &= B_1 e^{\lambda_1 t} \end{aligned} \quad \textit{ve} \quad \begin{aligned} x &= A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y &= B_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

fonksiyonları (32.3) sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{aligned} x &= c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y &= c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

olarak yazarız. Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek **32.10.**

$$\begin{aligned} x' &= 6x - 3y \\ y' &= 2x + y \end{aligned}$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{aligned}(6-\lambda)A-3B&=0\\ 2A+(1-\lambda)B&=0\end{aligned}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}(6-\lambda) & -3\\ 2 & (1-\lambda)\end{vmatrix} &= 0\Rightarrow\\ \lambda^2-7\lambda+12 &= 0\Rightarrow\\ \lambda_{1,2} &= 3,4\end{aligned}$$

köklerdir.

$$\lambda_1=3$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{matrix}3A-3B=0\\ 2A-2B=0\end{matrix}\Rightarrow A=B=1$$

için

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{3t}\\ y(t)&=e^{3t}\end{aligned}$$

çözümdür.

$$\lambda_2=4$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{matrix}2A-3B=0\\ 2A-3B=0\end{matrix}\Rightarrow 2A=3B=6$$

için

$$\begin{aligned}x(t)&=3e^{4t}\\ y(t)&=2e^{4t}\end{aligned}$$

çözümdür.

$$\begin{matrix}x(t)=e^{3t}\\ y(t)=e^{3t}\end{matrix}\quad\text{ve}\quad\begin{matrix}x(t)=3e^{4t}\\ y(t)=2e^{4t}\end{matrix}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{aligned}x&=c_1e^{3t}+3c_2e^{4t}\\ y&=c_1e^{3t}+2c_2e^{4t}\end{aligned}$$

olarak yazarız. □

Örnek 32.11.

$$\begin{aligned}x'&=-2x+7y\\ y'&=3x+2y\\ x(0)&=9\\ y(0)&=-1\end{aligned}$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{aligned}(-2-\lambda)A+7B&=0\\ 3A+(2-\lambda)B&=0\end{aligned}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}(-2-\lambda) & 7\\ 3 & (2-\lambda)\end{vmatrix} &= 0\Rightarrow\\ \lambda^2-25 &= 0\Rightarrow\\ \lambda_{1,2} &= \pm5\end{aligned}$$

köklerdir.

$$\lambda_1=-5$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{array}{l} 3A+7B=0 \\ 3A+7B=0 \end{array} \Rightarrow 3A=-7B=21$$

için

$$\begin{array}{l} x(t)=7e^{-5t} \\ y(t)=-3e^{-5t} \end{array}$$

çözümdür.

$$\lambda_2=5$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{array}{l} -7A+7B=0 \\ 3A-3B=0 \end{array} \Rightarrow A=B=1$$

için

$$\begin{array}{l} x(t)=e^{5t} \\ y(t)=e^{5t} \end{array}$$

çözümdür.

$$\begin{array}{l} x(t)=7e^{-5t} \\ y(t)=-3e^{-5t} \end{array} \text{ ve } \begin{array}{l} x(t)=e^{5t} \\ y(t)=e^{5t} \end{array}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{array}{l} x=7c_1e^{-5t}+c_2e^{5t} \\ y=-3c_1e^{-5t}+c_2e^{5t} \end{array}$$

olarak yazarız.

$$\begin{array}{l} x(0)=9 \\ y(0)=-1 \end{array}$$

başlangıç koşullarından

$$\begin{array}{l} 7c_1+c_2=9 \\ -3c_1+c_2=-1 \end{array} \Rightarrow c_1=1, c_2=2 \Rightarrow \begin{array}{l} x=7e^{-5t}+2e^{5t} \\ y=-3e^{-5t}+2e^{5t} \end{array}$$

çözümdür. □

32.2.2. *2.Durum: Eşit Reel kökler.*

Teorem 32.12. *λ , $(32.7)'$e karakteristik denklemin eşit tekrar eden reel kökü olsun.*

$$\begin{array}{l} x=Ae^{\lambda t} \\ y=Be^{\lambda t} \end{array} \; ve \; \begin{array}{l} x=(A_1t+A_2)e^{\lambda t} \\ y=(B_1t+B_2)e^{\lambda t} \end{array}$$

fonksiyonları (32.3) sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{array}{l} x=c_1Ae^{\lambda t}+c_2(A_1t+A_2)e^{\lambda t} \\ y=c_1Be^{\lambda t}+c_2(B_1t+B_2)e^{\lambda t} \end{array}$$

olarak yazarız. Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 32.13.

$$\begin{array}{l} x'=4x-y \\ y'=x+2y \end{array}$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{array}{l} (4-\lambda)A-B=0 \\ A+(2-\lambda)B=0 \end{array}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (4-\lambda) & -1 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow \\ \lambda^2-6\lambda+9 &= 0 \Rightarrow \\ \lambda_{1,2} &= 3 \end{aligned}$$

köklerdir.

$$\lambda_1 = 3$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{array}{l} A - B = 0 \\ A - B = 0 \end{array} \Rightarrow A = B = 1$$

için

$$\begin{array}{l} x(t) = e^{3t} \\ y(t) = e^{3t} \end{array}$$

çözümdür. Ve diğer lineer bağımsız çözüm

$$\begin{array}{l} x(t) = (A_1 t + A_2) e^{3t} \\ y(t) = (B_1 t + B_2) e^{3t} \end{array}$$

şeklindedir. Bunu denklemde yerine yazdığımızda

$$\begin{array}{l} e^{3t}(A_1 + 3A_1 t + 3A_2) = 4(A_1 t + A_2) e^{3t} - (B_1 t + B_2) e^{3t} \\ e^{3t}(B_1 + 3B_1 t + 3B_2) = (A_1 t + A_2) e^{3t} + 2(B_1 t + B_2) e^{3t} \\ (A_1 - B_1) t + (A_2 - A_1 - B_2) = 0 \\ (A_1 - B_1) t + (A_2 - B_1 - B_2) = 0 \\ (A_1 - B_1) = 0, \ A_2 - A_1 - B_2 = 0 \\ A_1 - B_1 = 0 \ A_2 - B_1 - B_2 = 0 \\ \Rightarrow A_1 = B_1 = A_2 - B_2 = 1 \\ \Rightarrow A_2 = 1, \ B_2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x(t) = e^{3t} \\ y(t) = e^{3t} \end{array} \text{ ve } \begin{array}{l} x(t) = (t+1) e^{3t} \\ y(t) = te^{3t} \end{array}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{array}{l} x = c_1 e^{3t} + c_2 (t+1) e^{3t} \\ y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} \end{array}$$

olarak yazarız. □

Örnek 32.14.

$$\begin{array}{l} x' = 6x - 4y \\ y' = x + 2y \\ x(0) = 2 \\ y(0) = 3 \end{array}$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{array}{l} (6-\lambda) A - 4B = 0 \\ A + (2-\lambda) B = 0 \end{array}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{array}{rcl} \begin{vmatrix} (6-\lambda) & -4 \\ 1 & (2-\lambda) \end{vmatrix} & = & 0 \Rightarrow \\ \lambda^2 - 8\lambda + 16 & = & 0 \Rightarrow \\ \lambda_{1,2} & = & 4 \end{array}$$

köklerdir.

$$\lambda_1 = 4$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{array}{l} 2A - 4B = 0 \\ A - 2B = 0 \end{array} \Rightarrow A = 2B = 2 \Rightarrow A = 2, B = 1$$

için

$$x(t) = 2e^{4t}$$
$$y(t) = e^{4t}$$

çözümdür. Ve diğer lineer bağımsız çözüm

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{4t}$$
$$y(t) = (B_1 t + B_2) e^{4t}$$

şeklindedir. Bunu denklemde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} e^{4t}(A_1 + 4A_1 t + 4A_2) &= 6(A_1 t + A_2) e^{4t} - 4(B_1 t + B_2) e^{4t} \\ e^{4t}(B_1 + 4B_1 t + 4B_2) &= (A_1 t + A_2) e^{4t} + 2(B_1 t + B_2) e^{4t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(2A_1 - 4B_1) t + (2A_2 - A_1 - 4B_2) = 0 \\ &(A_1 - 2B_1) t + (A_2 - B_1 - 2B_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(2A_1 - 4B_1) = 0,\ (2A_2 - A_1 - 4B_2) = 0 \\ &(A_1 - 2B_1) = 0\ A_2 - B_1 - 2B_2 = 0 \\ &\Rightarrow A_1 = 2B_1 = A_2 - 2B_2 = 2 \\ &\Rightarrow A_1 = 2, B_1 = 1, A_2 = 4,\ B_2 = 1 \end{aligned}$$

$$x(t) = (2t + 4) e^{4t}$$
$$y(t) = (t + 1) e^{4t}$$

şeklindedir

$$\begin{matrix} x(t) = 2e^{4t} \\ y(t) = e^{4t} \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \begin{matrix} x(t) = (2t+4) e^{4t} \\ y(t) = (t+1) e^{4t} \end{matrix}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$x = 2c_1 e^{4t} + c_2 (2t + 4) e^{4t}$$
$$y = c_1 e^{4t} + c_2 (t + 1) e^{4t}$$

olarak yazarız.

$$x(0) = 2$$
$$y(0) = 3$$

koşullarından

$$\begin{matrix} 2c_1 + 4c_2 = 2 \\ c_1 + c_2 = 3 \end{matrix} \Rightarrow c_1 = 5, c_2 = -2 \Rightarrow$$

$$x = 10e^{4t} - 2(2t + 4) e^{4t}$$
$$y = 5e^{4t} - 2(t + 1) e^{4t}$$

□

32.2.3. *3.Durum: Kompleks eşlenik kökler.*

Teorem 32.15. *$\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$, $(32.7)'$e karakteristik denklemin kompleks eşlenik kökleri olsun.*

$$x = (A_1 + iA_2) e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$
$$y = (B_1 + iB_2) e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

veya

$$\begin{matrix} x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) \end{matrix} \quad ve \quad \begin{matrix} x = e^{at}(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt) \\ y = e^{at}(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt) \end{matrix}$$

fonksiyonları (32.3) sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$x = c_1 e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2 e^{at}(A_2 \cos bt + A_1 \sin bt)$$
$$y = c_1 e^{at}(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2 e^{at}(B_2 \cos bt + B_1 \sin bt)$$

olarak yazarız. Burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir.

Örnek 32.16.

$$x' = 3x + 2y$$
$$y' = -5x + y$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{aligned}(3-\lambda)A+2B=0\\ -5A+(1-\lambda)B=0\end{aligned}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}(3-\lambda) & 2\\ -5 & (1-\lambda)\end{vmatrix} &= 0\Rightarrow\\ \lambda^2-4\lambda+13 &= 0\Rightarrow\\ \lambda_{1,2} &= 2\pm 3i\end{aligned}$$

köklerdir.

$$\lambda_1=2+3i$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{aligned}(1-3i)A+2B=0\\ -5A-(1+3i)B=0\end{aligned}\Rightarrow (1-3i)A=-2B\Rightarrow A=2,\ B=-1+3i$$

için

$$\begin{aligned}x&=2e^{2t}(\cos 3t+i\sin 3t)\\ y&=(-1+3i)e^{2t}(\cos 3t+i\sin 3t)\end{aligned}$$

çözümdür. Burada reel ve sanal kısımları ayırdığımızda

$$\begin{aligned}x&=2e^{2t}\cos 3t\\ y&=e^{2t}(-\cos 3t-3\sin 3t)\end{aligned}\quad\text{ve}\quad\begin{aligned}x&=2e^{2t}\sin 3t\\ y&=e^{2t}(3\cos 3t-\sin 3t)\end{aligned}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{aligned}x&=2c_1e^{2t}\cos 3t+2c_2e^{2t}\sin 3t\\ y&=c_1e^{2t}(-\cos 3t-3\sin 3t)+c_2e^{2t}(3\cos 3t-\sin 3t)\end{aligned}$$

olarak yazarız. □

Örnek 32.17.

$$\begin{aligned}x'&=7x-4y\\ y'&=2x+3y\\ x(0)&=2\\ y(0)&=-1\end{aligned}$$

sisteminin çözümünü bulunuz.

Çözüm Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{aligned}(7-\lambda)A-4B=0\\ 2A+(3-\lambda)B=0\end{aligned}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}(7-\lambda) & -4\\ 2 & (3-\lambda)\end{vmatrix} &= 0\Rightarrow\\ \lambda^2-10\lambda+29 &= 0\Rightarrow\\ \lambda_{1,2} &= 5-2i, 5+2i\end{aligned}$$

köklerdir.

$$\lambda_1=5-2i$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{aligned}(2+2i)A-4B=0\\ 2A+(-2+2i)B=0\end{aligned}\Rightarrow (2+2i)A=4B\Rightarrow A=4,\ B=2+2i$$

için

$$\begin{aligned}x(t)&=4e^{(5-2i)t}=4e^{5t}(\cos 2t-i\sin 2t)\\ y(t)&=(2+2i)e^{(5-2i)t}=(2+2i)e^{5t}(\cos 2t-i\sin 2t)\end{aligned}$$

çözümdür. Burada reel ve sanal kısımları ayırdığımızda

$$\begin{array}{l} x = 4e^{5t}\cos 2t \\ y = e^{5t}\left(2\cos 2t + 2\sin 2t\right) \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{l} x = 4e^{5t}\sin 2t \\ y = e^{5t}\left(2\cos 2t - 2\sin 2t\right) \end{array}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{array}{l} x = 4c_1e^{5t}\cos 2t + 4c_2e^{5t}\sin 2t \\ y = c_1e^{5t}\left(2\cos 2t + 2\sin 2t\right) + c_2e^{5t}\left(2\cos 2t - 2\sin 2t\right) \end{array}$$

olarak yazarız.

$$\begin{array}{l} x\left(0\right) = 2 \\ y\left(0\right) = -1 \end{array}$$

başlangıç koşullarından

$$\begin{array}{l} 4c_1 = 2 \\ 2c_1 + 2c_2 = -1 \end{array} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = -1 \Rightarrow \begin{array}{l} x = 7e^{-5t} + 2e^{5t} \\ y = -3e^{-5t} + 2e^{5t} \end{array}$$

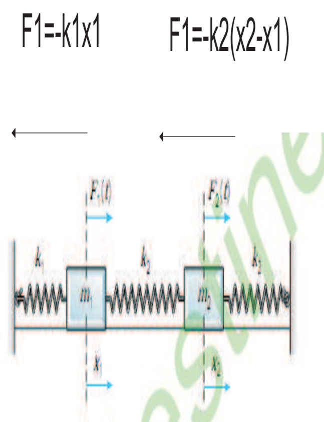
$$\begin{array}{l} x = 2e^{5t}\cos 2t - 4e^{5t}\sin 2t \\ y = \frac{1}{2}e^{5t}\left(2\cos 2t + 2\sin 2t\right) - e^{5t}\left(2\cos 2t - 2\sin 2t\right) \end{array}$$

çözümdür. $\square$

CHAPTER 8

Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Uygulamaları

33. Salınım Hareketi



m_1 kütlesindeki yer değiştirmeyi x_1 ile m_2 kütlesindeki yer değiştirmeyi ise x_2 ile gösterelim. 1. telin esneklik sabiti k_1, 2. sinin ise k_2 olsun. Şimdi m_1 kütlesine etkiyen kuvvetleri düşünelim. Burada 1.tel ve 2. telin uygulamış oldukları kuvvetler mevcuttur. 1. telin uygulamış olduğu kuvvet

$$F_1 = -k_1 x_1$$

2.kütlenin yer değiştirmesi ise $(x_2 - x_1)$ kadardır. 2. tele negatif olarak verilen kuvvet 1. tele pozitif olarak etkiyecektir. Böylece Newton un 2. kuralına göre

$$m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

2.kütleye uygulanan kuvvet Hooke kuralına göre

$$F_2 = -k_2 (x_2 - x_1)$$

ve Newton 2. kuralına göre

$$m_2 x_2'' = -k_2 (x_2 - x_1)$$

ve

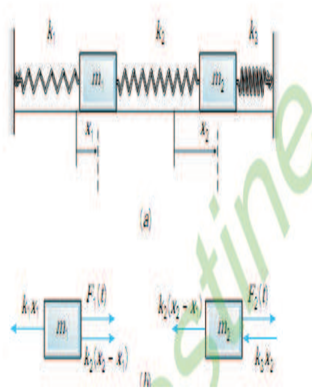
$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

diferansiyel denklem sitemini elde ederiz.

Örnek **33.1.** *Yatay ve sürtünmesiz bir düzlem üzerinde hareket etmekte olan $m_1 = 2kg$ ve $m_2 = 1kg$ olan cisimler şekilde görüldüğü gibi ağırlıksız yaylarla birbirine tutturulmuş olarak denge konumları etrafında salınım hareketi yapmaktadırlar. 1. telin esneklik katsayısı $k_1 = 4N/m$ 2. telin ise $k_2 = 2N/m$ olarak veriliyor. Başlangıçta 1. kütlenin uzaklığı $1m$ ve 2. kütlenin uzaklığı $5m/s$ hızsız olarak verildiğine göre herbirinin denge konumundan hangi uzaklıkta olduğunu bulunuz.*

Çözüm

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$



sisteminde verilenleri yerine yazıp düzenlediğimizde

$$\begin{aligned} &2x_1'' + 6x_1 - 2x_2 = 0 \\ &x_2'' - 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ &x_1(0) = 1, x_1'(0) = 0 \\ &x_2(0) = 5, x_2'(0) = 0 \end{aligned}$$

sistemini çözmeliyiz.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow && \begin{array}{l} \left(D^2+2\right) \;/\; \left(2D^2+6\right)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2 \;/\; -2x_1 + \left(D^2+2\right)x_2 = 0 \end{array} \\
&\Rightarrow && \left(\left(D^2+2\right)\left(2D^2+6\right) - 4\right)x_1 = 0 \\
&\Rightarrow && \left(2D^4 + 10D^2 + 8\right)x_1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow && m^4 + 5m^2 + 4 = 0 \Rightarrow \left(m^2+1\right)\left(m^2+4\right) = 0 \\
&\Rightarrow && m_{1,2} = \pm i, m_{3,4} = \pm 2i \\
&\Rightarrow && x_1(t) = c_1\cos t + c_2\sin t + c_3\cos 2t + c_4\sin 2t \\
&\Rightarrow && 2x_1'' + 6x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow && x_2 = x_1'' + 3x_1 \\
&= && (-c_1\cos t - c_2\sin t - 4c_3\cos 2t - 4c_4\sin 2t) + 3(c_1\cos t + c_2\sin t + c_3\cos 2t + c_4\sin 2t) \\
&= && 2c_1\cos t + 2c_2\sin t - c_3\cos 2t - c_4\sin 2t \\
&\Rightarrow && x_1(0) = 1, x_2(0) = 5 \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 + c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_3 = 5 \end{array} \Rightarrow c_1 = 2, c_3 = -1 \\
&\Rightarrow && x_1'(0) = 0, x_2'(0) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} c_2 + 2c_4 = 0 \\ 2c_2 - 2c_4 = 0 \end{array} \Rightarrow c_2 = 0, c_4 = 0 \\
&\Rightarrow && x_1(t) = 2\cos t - \cos 2t \\
&\Rightarrow && x_2(t) = 4\cos t + \cos 2t
\end{aligned}$$

□

34. Elektrik Devre Problemleri

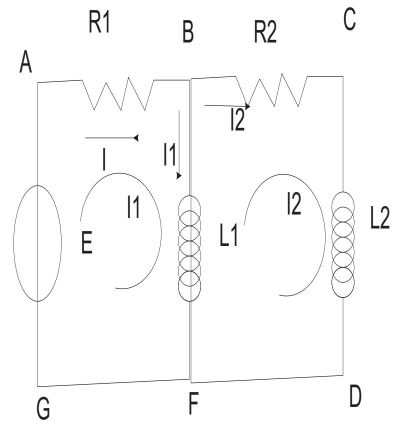
$$q' = I, V_R = RI, V_C = \frac{1}{C}q, V_L = LI'$$

Şekile göre ABGF kapalı devresinde toplam voltajlar eşit olmalıdır. Buna göre

$$V_{R_1} + V_{L_1} = E \Rightarrow R_1 I_1 + L_1\left(I_1' - I_2'\right) = E \Rightarrow L_1 I_1' - L_1 I_2' + R_1 I_1 = E$$

BCFG kapalı devresinde ise

$$V_{L_1} + V_{R_2} + V_{L_2} = 0 \Rightarrow L_1\left(I_2' - I_1'\right) + R_2 I_2 + L_2 I_2' = 0$$



diferansiyel denklemleri ile

$$\begin{array}{l} L_1 I_1' - L_1 I_2' + R_1 I_1 = E \\ -L_1 I_1' + (L_1 + L_2) I_2' + R_2 I_2 = 0 \end{array}$$

sistemini elde ederiz.

Örnek 34.1. *Yukarıdaki elektrik sisteminde $L_1 = 0.02H(enry), R_1 = 10\Omega, L_2 = 0.04H, R_2 = 20\Omega, E = 30V$ ve başlangıç akımı sıfır olduğuna göre herhangi zamandaki akımı bulunuz.*

Çözüm

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 0.02I_1' - 0.02I_2' + 10I_1 = 30 \\ -0.02I_1' + 0.06I_2' + 20I_2 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1' - I_2' + 500I_1 = 1500 \\ -I_1' + 3I_2' + 1000I_2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (3D+1000) \;/\; (D+500) I_1 - DI_2 = 1500 \\ D \;/\; -DI_1 + (3D+1000) I_2 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[(3D+1000)(D+500) - D^2\right] I_1 = (3D+1000)(1500)$$

$$\Rightarrow \left(2D^2 + 2500D + 500\,000\right) I_1 = 1500000$$

$$\Rightarrow \left(D^2 + 1250D + 250000\right) I_1 = 750000$$

$$\Rightarrow I_1'' + 1250I_1' + 250000I_1 = 750000$$

denkleminin öncelikle homojen kısmın çözümünü elde edelim:

$$\Rightarrow I_1'' + 1250I_1' + 250000I_1 = 0 \Rightarrow m^2 + 1250m + 250000 = 0 \Rightarrow (m+250)(m+1000) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = -250, m_2 = -1000 \Rightarrow I_{1,c}(t) = c_1 e^{-250t} + c_2 e^{-1000t}$$

özel çözüm için

$$I_{1,p} = A \Rightarrow A = 3 \Rightarrow I_1(t) = c_1 e^{-250t} + c_2 e^{-1000t} + 3$$

olarak buluruz.

$$\begin{array}{l} I_1' - I_2' + 500I_1 = 1500 \\ -I_1' + 3I_2' + 1000I_2 = 0 \end{array}$$

sisteminde I_2' terimlerini yok edersek:

$$\Rightarrow 2I_1' + 1500I_1 + 1000I_2 = 4500 \Rightarrow I_2 = \frac{4500 - 2I_1' - 1500I_1}{1000} \Rightarrow$$

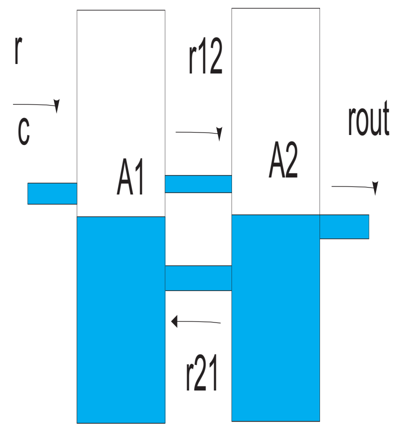
$$\Rightarrow I_2 = \frac{4500 - 2\left(-250c_1e^{-250t} - 1000c_2e^{-1000t}\right) - 1500\left(c_1e^{-250t} + c_2e^{-1000t} + 3\right)}{1000}$$

$$= \frac{500c_2e^{-1000t} - 1000c_1e^{-250t}}{1000}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{c_2}{2}e^{-1000t} - c_1e^{-250t}$$

□

35. Karışım Problemleri



şekildeki sistemde, 1. tanka $c\ \frac{gr}{l}$ bir kimyasal $r\frac{l}{dk}$ hızla boşaltılmaktadır. Ayrıca 1. tanktan r_{12} hız ile bir boşaltım ve r_{21} hızı ile 2. tanktan akım meydana gelmektedir.2. tanka ise 1. tanktan r_{12} hızında bir miktar kimyasal girişi olurken r_{21} ve r_{out} hızı ile çıkış meydana gelmektedir. A_1 ve A_2 ile 1. ve 2. tankerdeki kimyasal miktarlarını belirtirsek ve V_1, V_2 ile sırasıyla 1.ve 2. tankerin hacmini belirtirsek

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1}{dt} &= rc - r_{12}\frac{A_1}{V_1} + r_{21}\frac{A_2}{V_2} \\
\frac{dA_2}{dt} &= r_{12}\frac{A_1}{V_1} - (r_{21} + r_{out})\frac{A_2}{V_2}
\end{aligned}$$

diferansiyel denklem sisteminin çözümü 1. ve 2. tankerdeki kimyasal miktarlarını vericektir.

Örnek 35.1. *Birbiriyle bağlantılı X ve Y tanklarında X başlangıçta*$100lt$ *lik tuzlu suyun içinde* $5kg$ *tuz, Y ise* $100lt$ *like tuzlu suyun içinde* $2kg$ *lık tuzlu su içermektedir.* $6\ l/dk$ *lık bir hız ile X tankerine saf su girişi olmaktadır. X tankerinden Y tankerine tuzlu su* $8\ l/dk$ *lık bir hızla akmaktadır. Y tankerinden X tankerine ise* $2\ l/dk$ *lık hızla tuzlu su geri pompalanmaktadır. Y tankerinden tuzlu su* $6\ l/dk$ *hızla boşaltımaktadır. Herbir tankta çözünürlük homojen olucak şekilde karıştırıldığına göre tanklardaki, herhangi bir zamandaki tuz miktarı nedir?*

Çözüm

$$c = 0, r = 6l/dk,\ r_{12} = 8l/dk, r_{21} = 2l/dk, r_{out} = 6l/dk$$

1. tankta 6l/dk lık bir giriş ve toplamda $8 - 2 = 6\ l/dk$ *lık bir çıkış olduğundan toplam litrede bir değişim olmayacaktır. Ve benzer şekilde Y tankında da 8-2=6 lık bir giriş ve 6 lık bir çıkış olduğundan Y deki hacim değişmeyecektir. Buna göre denklemi*

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -8\frac{x}{100} + 2\frac{y}{100} \\
\frac{dy}{dt} &= 8\frac{x}{100} - 8\frac{y}{100} \\
x(0) &= 5,\ y(0) = 2
\end{aligned}$$

sisteminin çözümünden

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\frac{8}{100}-\lambda & \frac{2}{100} \\ \frac{8}{100} & -\frac{8}{100}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2+\frac{4}{25}\lambda+\frac{3}{625}=0 \Rightarrow \lambda_1=-\frac{1}{25}, \lambda_2=-\frac{3}{25}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1=-\frac{1}{25} \Rightarrow \begin{array}{c} x=Ae^{-\frac{1}{25}t} \\ y=Be^{-\frac{1}{25}t} \end{array} \Rightarrow -4A+2B=0 \Rightarrow B=2, A=1 \Rightarrow \begin{array}{c} x=e^{-\frac{1}{25}t} \\ y=2e^{-\frac{1}{25}t} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1=-\frac{3}{25} \Rightarrow \begin{array}{c} x=Ae^{-\frac{3}{25}t} \\ y=Be^{-\frac{3}{25}t} \end{array} \Rightarrow 4A+2B=0 \Rightarrow B=2, A=-1 \Rightarrow \begin{array}{c} x=-e^{-\frac{3}{25}t} \\ y=2e^{-\frac{3}{25}t} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} x=c_1e^{-\frac{1}{25}t}-c_2e^{-\frac{3}{25}t} \\ y=2c_1e^{-\frac{1}{25}t}+2c_2e^{-\frac{3}{25}t} \end{array} \Rightarrow x(0)=5,\ y(0)=2$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} 5=c_1-c_2 \\ 2=2c_1+2c_2 \end{array} \Rightarrow c_1=3, c_2=-2 \Rightarrow \begin{array}{c} x=3e^{-\frac{1}{25}t}+2e^{-\frac{3}{25}t} \\ y=6e^{-\frac{1}{25}t}-4e^{-\frac{3}{25}t} \end{array}$$

□

CHAPTER 9

Nümerik Yöntemler

$$\begin{array}{c} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \tag{35.1}$$

BDP nin çözümünü bulmak herzaman mümkün olmayabilir. Bu yüzden bunların çözümleri için diğer bir yaklaşım da nümerik yöntemlerdir.

36. Euler[1] yöntemi

(35.1) BDP nin gerçek çözümü $\varphi(x)$ olsun. h yeterince küçük pozitif bir artım olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h \\ x_2 &= x_1 + h \\ &\ldots \\ x_n &= x_{n-1} + h \end{aligned}$$

Bu noktalardaki yaklaşık çözümler $y_1, y_2, ..., y_n$ ve gerçek çözümler $\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n)$ olsunlar.

Tanım 36.1.

$$\%\delta\varphi = \left| \frac{y_n - \varphi(x_n)}{\varphi(x_n)} \right| .100$$

oranına yüzdelikli bağıl hata denir.

$\varphi(x)$, fonksiyonu gerçek çözüm ise (35.1) BDP yi sağlar.

$$\begin{array}{c} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{array}$$

denklemde her iki tarafın (x_0, x_1) aralığında integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \varphi'(x)\, dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x))\, dx \Rightarrow \\ \varphi(x_1) - \varphi(x_0) &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x))\, dx \Rightarrow \\ \varphi(x_1) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, \varphi(x))\, dx \end{aligned}$$

Euler yöntemi soldaki integraldeki $f(x, \varphi(x))$ değeri yerine $f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0)$ değerini alır. Buna göre

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &\approx y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, y_0)\, dx \\ \int_{x_0}^{x_1} f(x_0, y_0)\, dx &= f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = hf(x_0, y_0) \Rightarrow \\ \varphi(x_1) &\approx y_0 + hf(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Buna göre $\varphi(x_1)$ yaklaşımını

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \tag{36.1}$$

[1] Leonhard Paul Euler (15 April 1707 – 18 September 1783) was a pioneering Swiss mathematician and physicist who spent most of his life in Russia and Germany.

olarak elde ederiz. (36.1) yaklaşımının herbir $x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları için genelleştirilmesine

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \tag{36.2}$$

Euler formülü denir.

Örnek 36.2.

$$y' = 2x + y$$
$$y(0) = 1$$

BDP nin $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ noktalarındaki gerçek ve yaklaşık çözümlerini bulup yüzdelik hatayı elde ediniz.

Çözüm *Öncelikle gerçek çözümü bulalım:*

$$y' = y \Rightarrow y = ce^x$$

homojen kısmın çözümü

$$y = c(x)e^x$$

homojen olmayan kısmın çözümleri olmak üzere

$$\begin{aligned} c'(x)e^x + c(x)e^x &= 2x + c(x)e^x \Rightarrow c'(x) = 2xe^{-x} \Rightarrow c(x) = \int 2xe^{-x}dx \\ c(x) &= -2e^{-x} - 2xe^{-x} + c_1 \Rightarrow \\ y &= -2 - 2x + c_1e^x \end{aligned}$$

$y(0) = 1$ *koşulundan*

$$\begin{aligned} c_1 &= 3 \Rightarrow \\ y &= \varphi(x) = -2 - 2x + 3\exp(x) \\ &\quad \varphi(0.1) \end{aligned}$$

fonksiyonu gerçek çözümdür. $h = 0.1,\ f(x, y) = 2x + y$

x_n	*Kesin çözüm*	*Yaklaşık çözüm*	$\%\delta\varphi$
0	1	1	0
0.1	1,1155	1,1	1,3906
0.2	1,2642	1,23	2,7059
0.3	1,4496	1,393	3,903
0.4	1,6755	1,5923	4,9642
0.5	1,9462	1,8315	5,8902
0.6	2,2664	2,1147	6,6924
0.7	2,6413	2,4462	7,3869
0.8	3,0766	2,8308	7,9911
0.9	3,5788	3,2738	8,5214
1	4,1548	3,7812	8,9923

□

Örnek 36.3.

$$y' = y + \tfrac{xy^2}{10}$$
$$y(0) = 2$$

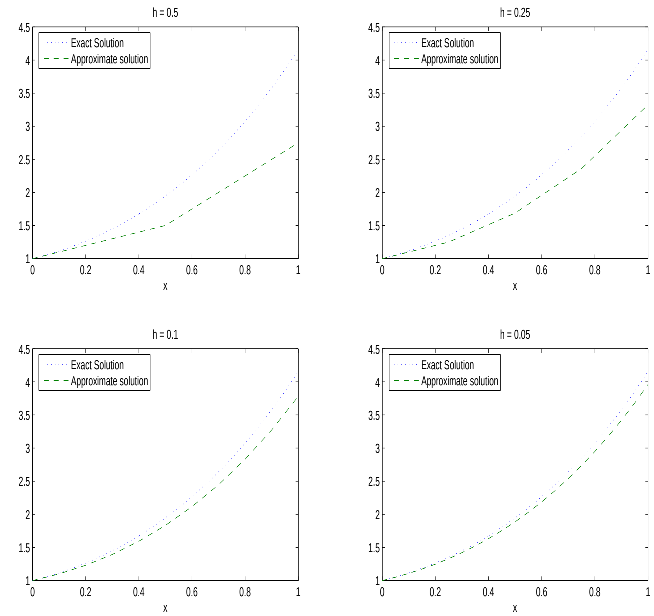
BDP nin $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ noktalarındaki gerçek ve yaklaşık çözümlerini bulup yüzdelik hatayı elde ediniz.

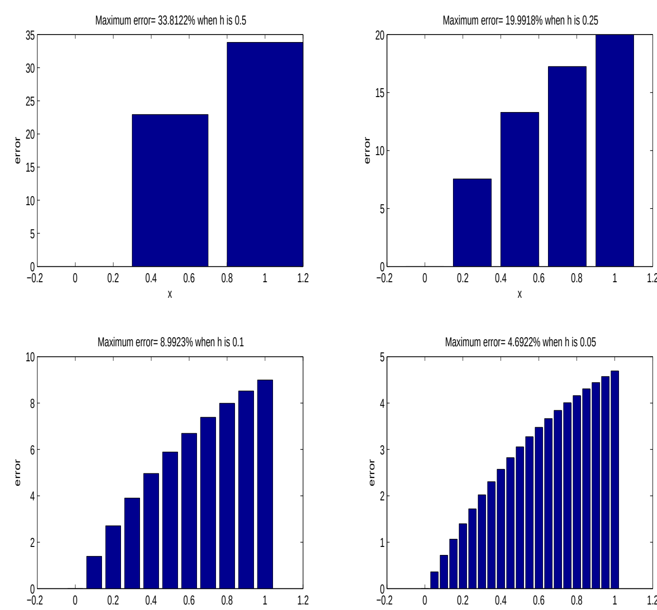
Çözüm *Öncelikle gerçek çözümü bulalım (Bernoulli denklemi):*

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} &= \frac{y}{y^2} + \frac{x}{10} \Rightarrow z = \frac{1}{y} \Rightarrow \\ -z' &= z + \frac{x}{10} \end{aligned}$$

homojen kısmın çözümü

$$z = c(x)e^{-x}$$





homojen olmayan kısmın çözümleri olmak üzere

$$
\begin{aligned}
-c'(x)\,e^{-x} + c(x)\,e^{-x} &= \frac{x}{10} + c(x)\,e^{-x} \Rightarrow c'(x) = -\frac{x}{10}e^{x} \Rightarrow c(x) = -\int \frac{x}{10}e^{x}dx \\
c(x) &= -\frac{1}{10}xe^{x} + \frac{1}{10}e^{x} + c_1 \Rightarrow \\
z &= -\frac{1}{10}x + \frac{1}{10} + c_1 e^{-x} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{10}x + \frac{1}{10} + c_1 e^{-x}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

$y(0)=2$ koşulundan

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{5} \Rightarrow \\ y &= \varphi(x) = \left(-\frac{1}{10}x + \frac{1}{10} + \frac{2}{5}e^{-x}\right)^{-1} \\ & \varphi(0.1) \end{aligned}$$

fonksiyonu gerçek çözümdür. $h=0.1$, $f(x,y) = y + \frac{xy^2}{10}$

x_n	*Kesin çözüm*	*Yaklaşık çözüm*	$\%\delta\varphi$
0	2	2	0
0.1	2,2127	2,2	0,57431
0.2	2,454	2,4248	1,1896
0.3	2,7298	2,6791	1,8579
0.4	2,7298	2,9685	2,5944
0.5	3,4175	3,3006	3,4196
0.6	3,8532	3,6852	4,361
0.7	4,3738	4,1352	5,4562
0.8	5,0067	4,6684	6,7579
0.9	5,7928	5,3096	8,3423
1	6,7957	6,0942	10,322

□

37. Runge-Kutta Yöntemi

$x_1, x_2, ..., x_n$ noktaları için Runge-Kutta yöntemi ile yaklaşık çözüm

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \end{cases} \tag{37.1}$$

$$K = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{37.2}$$

$$y_{n+1} = y_n + K \tag{37.3}$$

olarak elde edilir..

Örnek 37.1.

$$\begin{gathered} y' = 2x + y \\ y(0) = 1 \end{gathered}$$

BDP nin $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ *noktalarındaki gerçek ve yaklaşık çözümlerini bulup yüzdelik hatayı elde ediniz.*

Çözüm *Öncelikle gerçek çözümü bulalım:*

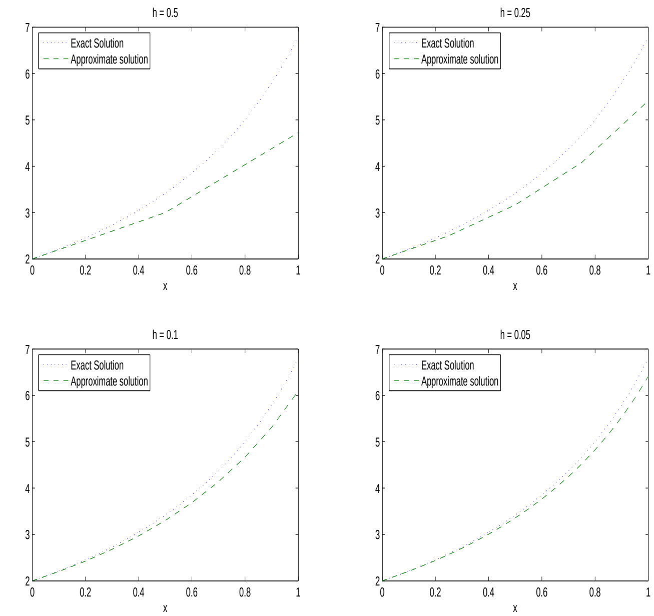
$$y' = y \Rightarrow y = ce^x$$

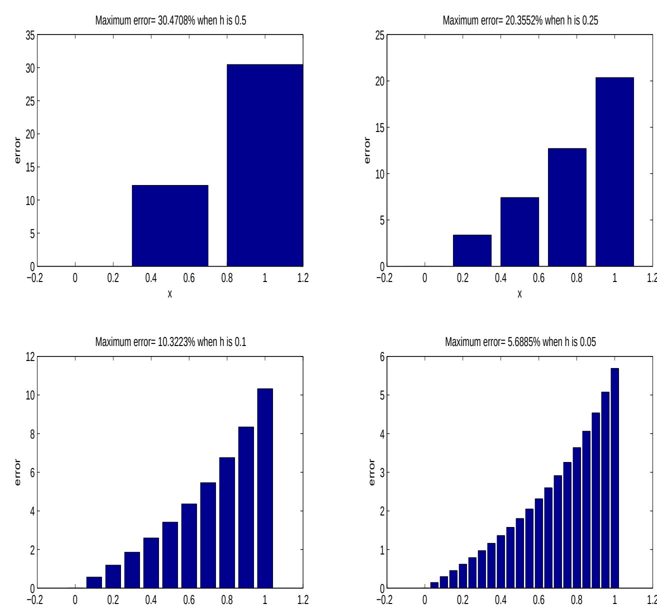
homojen kısmın çözümü

$$y = c(x)e^x$$

homojen olmayan kısmın çözümleri olmak üzere

$$\begin{aligned} c'(x)e^x + c(x)e^x &= 2x + c(x)e^x \Rightarrow c'(x) = 2xe^{-x} \Rightarrow c(x) = \int 2xe^{-x}dx \\ c(x) &= -2e^{-x} - 2xe^{-x} + c_1 \Rightarrow \\ y &= -2 - 2x + c_1e^x \end{aligned}$$





$y\,(0) = 1$ *koşulundan*

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 3 \Rightarrow \\
y &= \varphi\,(x) = -2 - 2x + 3\exp\,(x) \\
&\quad \varphi\,(0.1)
\end{aligned}
$$

fonksiyonu gerçek çözümdür. $h = 0.1,\ f(x, y) = 2x + y$

x_n	*Kesin çözüm*	*Yaklaşık çözüm*	$\%\delta\varphi$
0	1	1	0
0.1	$1,1155$	$1,1155$	$2,279e-005$
0.2	$1,2642$	$1,2642$	$4,4449e-005$
0.3	$1,4496$	$1,4496$	$6,4263e-005$
0.4	$1,6755$	$1,6755$	$8,1928e-005$
0.5	$1,9462$	$1,9462$	$9,7438e-005$
0.6	$2,2664$	$2,2664$	$11,097e-005$
0.7	$2,6413$	$2,6413$	$12,277e-005$
0.8	$3,0766$	$3,0766$	$13,312e-005$
0.9	$3,5788$	$3,5788$	$14,229e-005$
1	$4,1548$	$4,1548$	$15,05e-005$

$\square$

Örnek 37.2.

$$\begin{gathered} y' = y + \tfrac{xy^2}{10} \\ y(0) = 2 \end{gathered}$$

BDP nin $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$ *noktalarındaki gerçek ve yaklaşık çözümlerini bulup yüzdelik hatayı elde ediniz.*

Çözüm *Öncelikle gerçek çözümü bulalım (Bernoulli denklemi):*

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^2} &= \frac{y}{y^2} + \frac{x}{10} \Rightarrow z = \frac{1}{y} \Rightarrow \\ -z' &= z + \frac{x}{10} \end{aligned}$$

homojen kısmın çözümü

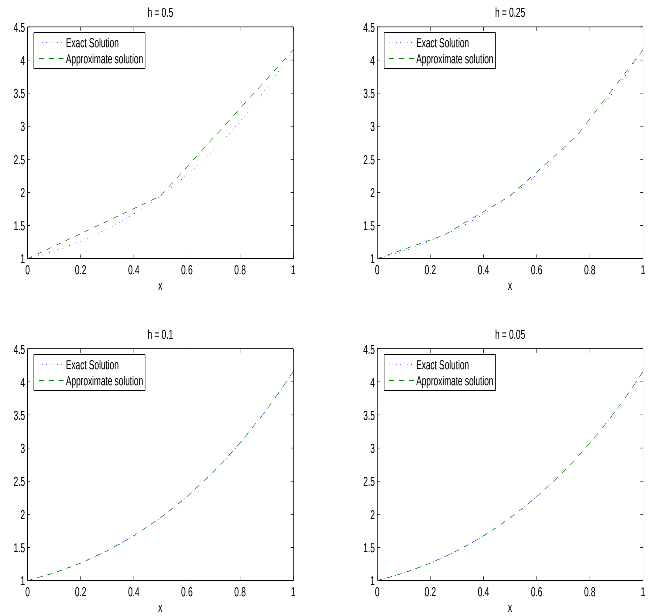
$$z = c(x)\,e^{-x}$$

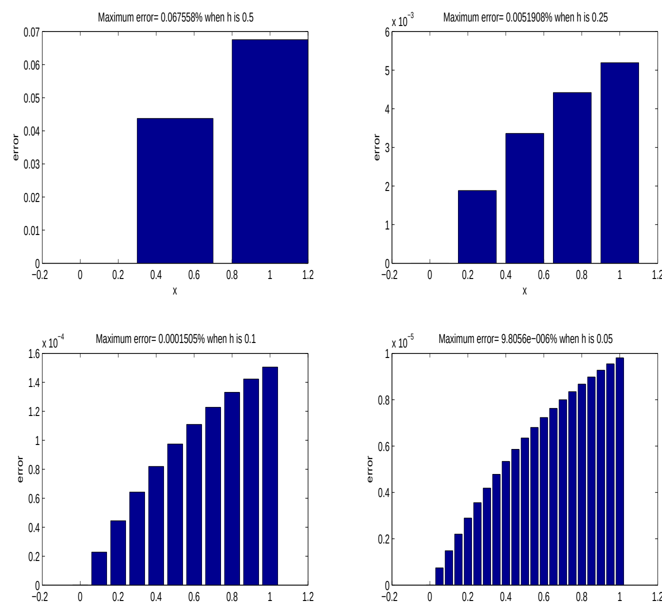
homojen olmayan kısmın çözümleri olmak üzere

$$\begin{aligned} -c'(x)\,e^{-x} + c(x)\,e^{-x} &= \frac{x}{10} + c(x)\,e^{-x} \Rightarrow c'(x) = -\frac{x}{10}e^{x} \Rightarrow c(x) = -\int \frac{x}{10}e^{x}dx \\ c(x) &= -\frac{1}{10}xe^{x} + \frac{1}{10}e^{x} + c_1 \Rightarrow \\ z &= -\frac{1}{10}x + \frac{1}{10} + c_1e^{-x} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{10}x + \frac{1}{10} + c_1e^{-x}\right)^{-1} \end{aligned}$$

$y(0) = 2$ *koşulundan*

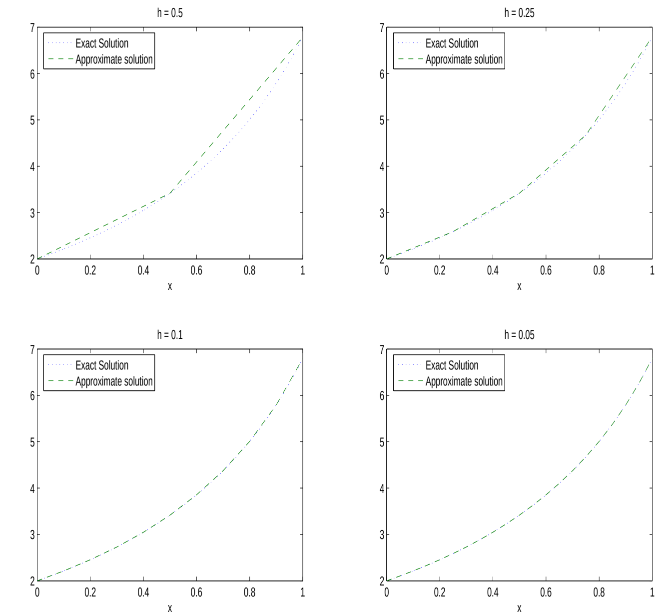
$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{5} \Rightarrow \\ y &= \varphi(x) = \left(-\frac{1}{10}x + \frac{1}{10} + \frac{2}{5}e^{-x}\right)^{-1} \\ & \varphi(0.1) \end{aligned}$$

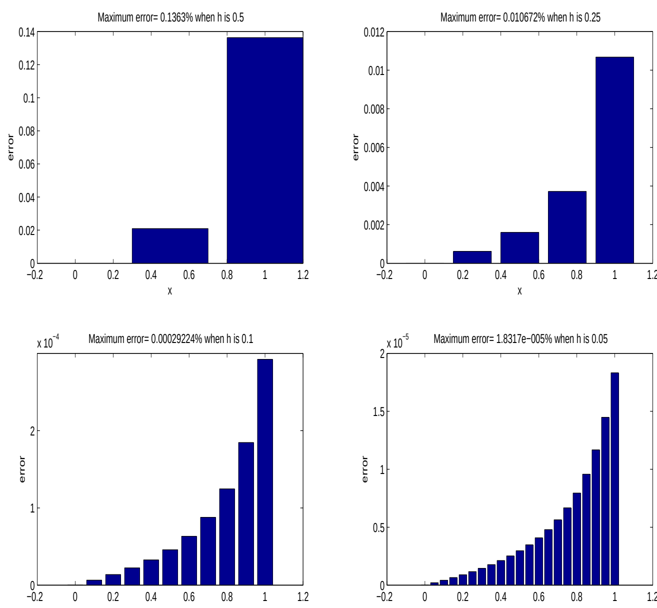




fonksiyonu gerçek çözümdür. $h = 0.1,\ f(x, y) = y + \frac{xy^2}{10}$

x_n	*Kesin çözüm*	*Yaklaşık çözüm*	$\%\delta\varphi$
0	2	2	0
0.1	$2,2127$	$2,2127$	$6,4525e-006$
0.2	$2,454$	$2,454$	$1,3774e-005$
0.3	$2,7298$	$2,7298$	$2,234e-005$
0.4	$2,7298$	$2,7298$	$3,2728e-005$
0.5	$3,4175$	$3,4175$	$4,5861e-005$
0.6	$3,8532$	$3,8532$	$6,3288e-005$
0.7	$4,3738$	$4,3738$	$8,7773e-005$
0.8	$5,0067$	$5,0067$	$12,458e-005$
0.9	$5,7928$	$5,7928$	$18,457e-005$
1	$6,7957$	$6,7957$	$29,224e-005$





□

Aşağıdaki grafik ile 1. ve 2. örneklerin Euler ve Runge-Kutta yöntemi ile çözümünden elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması gösterilmektedir.

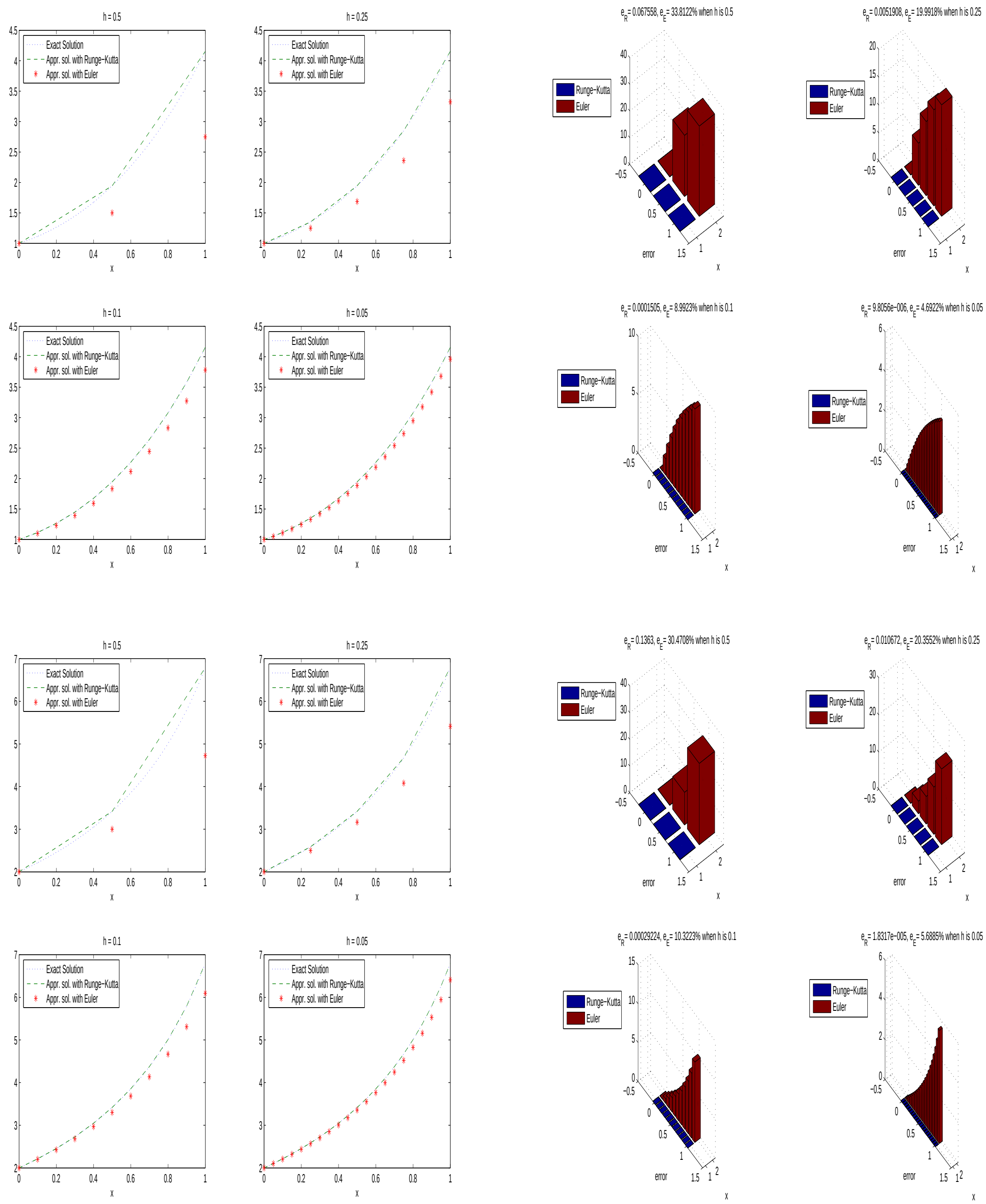


Figure 37.1. Örnek 1. için ve Örnek 2. için

38. Sistemler için Euler yöntemi

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \\ x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{38.1}$$

sistemi için Euler yöntemi

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + h \\ x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \\ n &= 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{38.2}$$

ile verilir.

Örnek 38.1.

$$\begin{aligned} &x' = 5x - 2y \\ &y' = 3x \\ &x(0) = 1 \\ &y(0) = 2 \end{aligned}$$

sisteminin gerçek ve yaklaşık çözümünün $t = 0.1, 0.2, ..., 1$ *noktalarındaki değerlerini bulup yüzdelikli bağıl hatayı bulunuz.*

Çözüm Öncelikle gerçek çözümü bulalım. Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{aligned} &(5 - \lambda) A - 2B = 0 \\ &3A + (-\lambda) B = 0 \end{aligned}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} (5-\lambda) & -2 \\ 3 & (-\lambda) \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 &= 0 \Rightarrow \\ \lambda_{1,2} &= 3, 2 \end{aligned}$$

köklerdir.

$$\lambda_1 = 3$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{matrix} 2A - 2B = 0 \\ 3A - 3B = 0 \end{matrix} \Rightarrow A = B = 1$$

için

$$\begin{aligned} &x(t) = e^{3t} \\ &y(t) = e^{3t} \end{aligned}$$

çözümdür.

$$\lambda_2 = 2$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{matrix} 3A - 2B = 0 \\ 2A - 2B = 0 \end{matrix} \Rightarrow 3A = 2B = 6$$

için

$$\begin{aligned} &x(t) = 2e^{2t} \\ &y(t) = 3e^{2t} \end{aligned}$$

çözümdür.

$$\begin{matrix} x(t) = e^{3t} \\ y(t) = e^{3t} \end{matrix} \text{ ve } \begin{matrix} x(t) = 2e^{2t} \\ y(t) = 3e^{2t} \end{matrix}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{2t} \\ y &= c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{2t} \end{aligned}$$

olarak yazarız.

$$\begin{aligned} &x(0) = 1 \\ &y(0) = 2 \end{aligned}$$

koşullarından

$$\begin{array}{l} c_1 + 2c_2 = 1 \\ c_1 + 3c_2 = 2 \end{array} \Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} x = -e^{3t} + 2e^{2t} \\ y = -e^{3t} + 3e^{2t} \end{array}$$

çözümdür.

t_n	$x(t_n)$	$x_h(t_n)$	$y(t_n)$	$y_h(t_n)$	$\left\lvert \frac{x-x_h}{x} \right\rvert .100$	$\left\lvert \frac{y-y_h}{y} \right\rvert .100$
0	1	1	2	2	0	0
0.1	$1,0929$	$1,1$	$2,3143$	$2,3$	$0,64535$	$0,62002$
0.2	$1,1615$	$1,19$	$2,6534$	$2,63$	$2,451$	$0,88022$
0.3	$1,1846$	$1,259$	$3,0068$	$2,987$	$6,2775$	$0,65696$
0.4	$1,131$	$1,2911$	$3,3565$	$3,3647$	$14,159$	$0,24413$
0.5	$0,95487$	$1,2637$	$3,6732$	$3,752$	$32,343$	$2,1473$
0.6	$0,59059$	$1,1452$	$3,9107$	$4,1311$	$93,902$	$5,6368$
0.7	$-0,05577$	$0,89151$	$3,9994$	$4,4747$	$1698,5$	$11,883$
0.8	$-1,1171$	$0,44233$	$3,8359$	$4,7421$	$139,6$	$23,625$
0.9	$-2,7804$	$-0,28494$	$3,2692$	$4,8748$	$89,752$	$49,114$
1	$-5,3074$	$-1,4024$	$2,0816$	$4,7894$	$73,577$	$130,08$

□

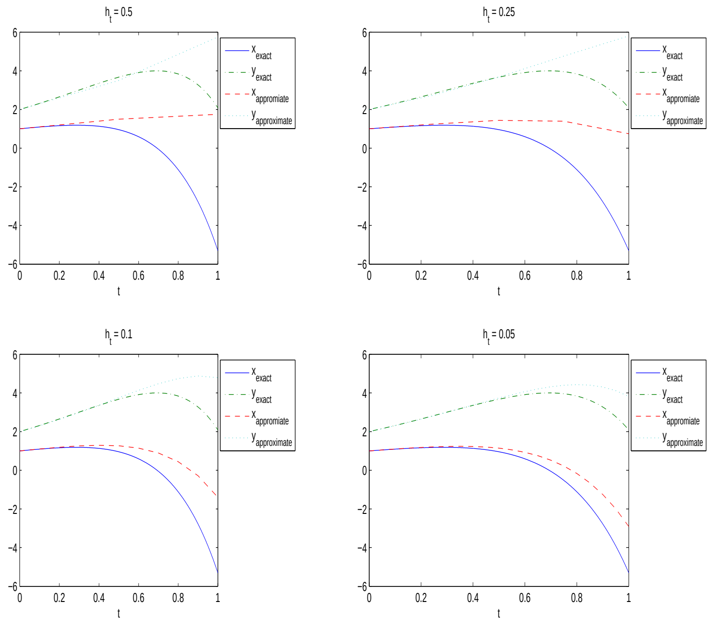
39. Sistemler için Runge-Kutta yöntemi

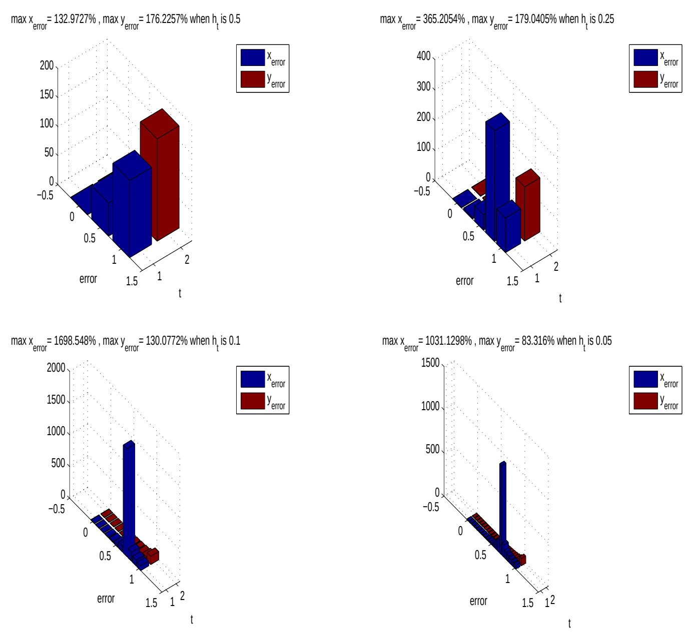
$$\begin{array}{l} x' = f(t,x,y) \\ y' = g(t,x,y) \\ x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \tag{39.1}$$

sistemi için Runge-Kutta yöntemi

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= t_n + h \\
k_1 &= hf(t_n, x_n, y_n) \\
m_1 &= hg(t_n, x_n, y_n) \\
k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}\right) \\
m_2 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{m_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}\right) \\
m_3 &= hg\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{m_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_3, y_n + m_3) \\
m_4 &= hg(t_n + h, x_n + k_3, y_n + m_3) \\
K &= \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \\
M &= \frac{m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4}{6} \\
x_{n+1} &= x_n + K \\
y_{n+1} &= y_n + K \\
n &= 1, 2, 3, ...
\end{aligned} \tag{39.2}$$

ile verilir.





Örnek 39.1.

$$
\begin{aligned}
x' &= 5x - 2y \\
y' &= 3x \\
x(0) &= 1 \\
y(0) &= 2
\end{aligned}
$$

sisteminin gerçek ve yaklaşık çözümünün $t = 0.1, 0.2, ..., 1$ *noktalarındaki değerlerini bulup yüzdelikli bağıl hatayı bulunuz.*

Çözüm Öncelikle gerçek çözümü bulalım. Sisteme karşılık gelen lineer cebirsel denklemler

$$\begin{array}{l}(5-\lambda)\,A-2B=0\\ 3A+(-\lambda)\,B=0\end{array}$$

ve sisteme karşılık gelen karaktestik denklem

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}(5-\lambda) & -2\\ 3 & (-\lambda)\end{vmatrix} &= 0\Rightarrow\\ \lambda^2-5\lambda+6 &= 0\Rightarrow\\ \lambda_{1,2} &= 3,2\end{aligned}$$

köklerdir.

$$\lambda_1=3$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{array}{l}2A-2B=0\\ 3A-3B=0\end{array}\Rightarrow A=B=1$$

için

$$\begin{array}{l}x\,(t)=e^{3t}\\ y\,(t)=e^{3t}\end{array}$$

çözümdür.

$$\lambda_2=2$$

için elde edilen cebirsel denklem

$$\begin{array}{l}3A-2B=0\\ 2A-2B=0\end{array}\Rightarrow 3A=2B=6$$

için

$$\begin{array}{l}x\,(t)=2e^{2t}\\ y\,(t)=3e^{2t}\end{array}$$

çözümdür.

$$\begin{array}{l}x\,(t)=e^{3t}\\ y\,(t)=e^{3t}\end{array}\ \text{ve}\ \begin{array}{l}x\,(t)=2e^{2t}\\ y\,(t)=3e^{2t}\end{array}$$

fonksiyonları sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$\begin{array}{l}x=c_1e^{3t}+2c_2e^{2t}\\ y=c_1e^{3t}+3c_2e^{2t}\end{array}$$

olarak yazarız.

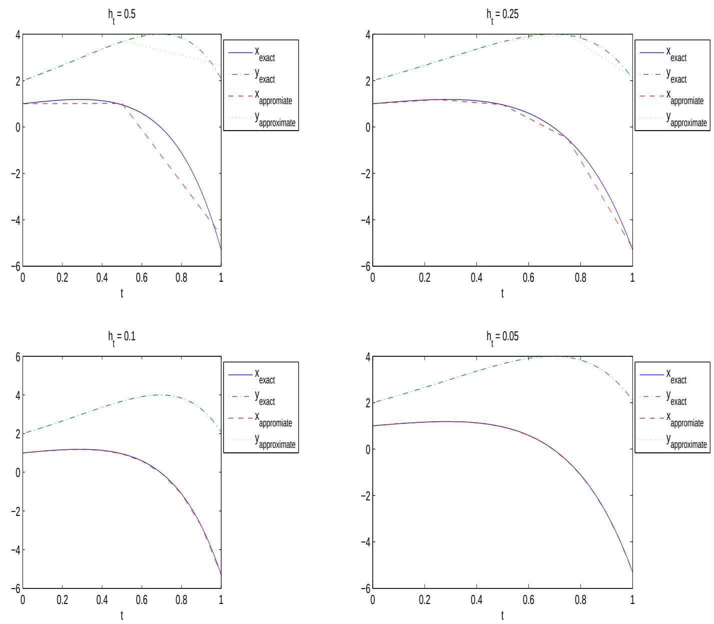
$$\begin{array}{l}x\,(0)=1\\ y\,(0)=2\end{array}$$

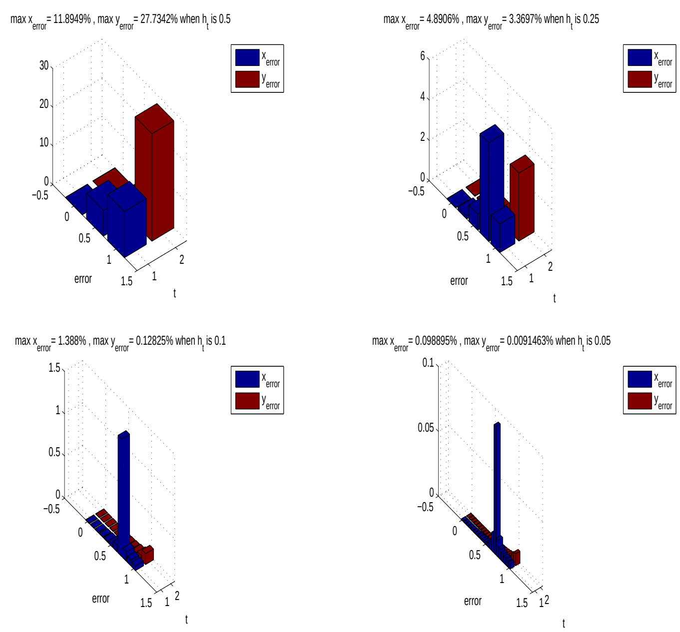
koşullarından

$$\begin{array}{l}c_1+2c_2=1\\ c_1+3c_2=2\end{array}\Rightarrow c_1=-1,c_2=1\Rightarrow\begin{array}{l}x=-e^{3t}+2e^{2t}\\ y=-e^{3t}+3e^{2t}\end{array}$$

çözümdür.

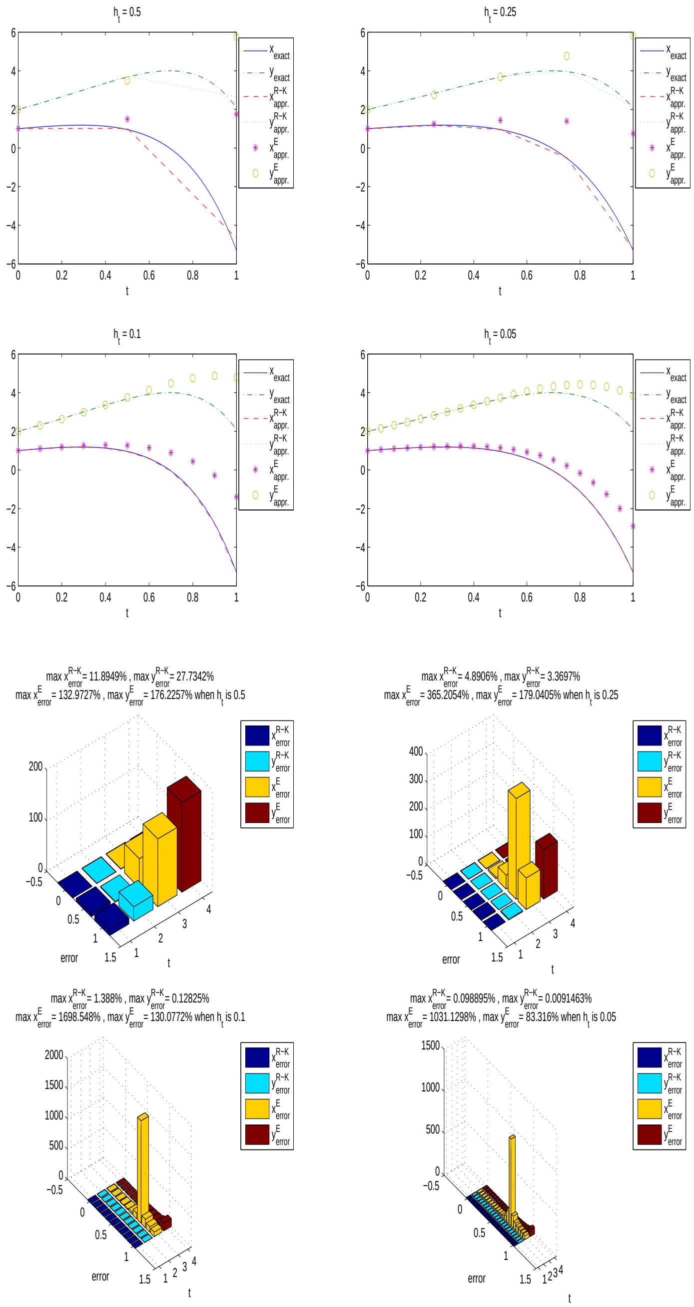
t_n	$x\,(t_n)$	$x_h\,(t_n)$	$y\,(t_n)$	$y_h\,(t_n)$	$\left\lvert\frac{x-x_h}{x}\right\rvert.100$	$\left\lvert\frac{y-y_h}{y}\right\rvert.100$
0	1	1	2	2	0	0
0.1	$1,0929$	$1,093$	$2,3143$	$2,3144$	$0,0014448$	$0,00056314$
0.2	$1,1615$	$1,1616$	$2,6534$	$2,6534$	$0,0037923$	$0,0014062$
0.3	$1,1846$	$1,1847$	$3,0068$	$3,0068$	$0,0077479$	$0,0026421$
0.4	$1,131$	$1,1311$	$3,3565$	$3,3567$	$0,01498$	$0,0044487$
0.5	$0,95487$	$0,95517$	$3,6732$	$3,6734$	$0,030614$	$0,0071228$
0.6	$0,59059$	$0,59107$	$3,9107$	$3,9111$	$0,081778$	$0,0112$
0.7	$-0,05577$	$-0,054996$	$3,9994$	$4,0001$	$1,388$	$0,017752$
0.8	$-1,1171$	$-1,1159$	$3,8359$	$3,837$	$0,10858$	$0,029289$
0.9	$-2,7804$	$-2,7786$	$3,2692$	$3,271$	$0,067179$	$0,053374$
1	$-5,3074$	$-5,3046$	$2,0816$	$2,0843$	$0,053445$	$0,12825$





□

Asağıdaki grafik ile Euler ve Runge-Kutta yöntemlerinin karşılaştırılması verilmiştir.


h_t = 0.5
h_t = 0.25
h_t = 0.1
h_t = 0.05
t
x_exact
y_exact
x^{R−K}_appr.
y^{R−K}_appr.
x^E_appr.
y^E_appr.
max x^{R−K}_error = 11.8949% , max y^{R−K}_error = 27.7342%
max x^E_error = 132.9727% , max y^E_error = 176.2257% when h_t is 0.5
max x^{R−K}_error = 4.8906% , max y^{R−K}_error = 3.3697%
max x^E_error = 365.2054% , max y^E_error = 179.0405% when h_t is 0.25
max x^{R−K}_error = 1.388% , max y^{R−K}_error = 0.12825%
max x^E_error = 1698.548% , max y^E_error = 130.0772% when h_t is 0.1
max x^{R−K}_error = 0.098895% , max y^{R−K}_error = 0.0091463%
max x^E_error = 1031.1298% , max y^E_error = 83.316% when h_t is 0.05
error
x^{R−K}_error
y^{R−K}_error
x^E_error
y^E_error

CHAPTER 10

Laplace Dönüşümü

40. Laplace ve Ters Laplace dönüşmü

Laplace dönüşümleri, başlangıç sınır değer problemlerinin çözümleri için çok etkili bir yöntemdir. Burada uygulanacak olan işlemler sırasıyla

Adım 1.: Verilen ADD cebirsel denkleme dönüştürülür.
Adım 2.: Cebirsel denklem çözülür
Adım 3.: 2. adımdaki cebirsel denklemin çözümü, ters dönüşüm ile ADD nin çözümü elde edilir.

Bu yöntemin çok önemli avantajları mevcuttur.

1.: Başlangıç değer probleminin çözümü direkt olarak elde edilir. Diğer yöntemlerde c sabitleri ile elde edilen çözümde başlangıç koşulları verilerek c sabitleri bulunur.
2.: En önemli avantajı homojen olmayan denklemlerde, sağ taraftaki fonksiyonun sürekli olmadığı durumlarda da çözümü elde edebiliriz.

Tanım 40.1. *$f(t)$, $t \geq 0$ fonksiyonun Laplace[1] dönüşümü $F(s)$ ile gösterilir*

$$F(s) = L(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{40.1}$$

ile tanımlanır.

Tanım 40.2. *$F(s)$ fonksiyonun ters Laplace dönüşümü ise $f(t)$, $t \geq 0$ dir*

$$f(t) = L^{-1}(F)$$

ile gösterilir.

Notasyon 40.3. *t ye bağlı olanlar fonksiyonlar s ye bağlı olanları da dönüşümler olarak düşüneceğiz. Fonksiyonları küçük harfler ile dönüşümleri ise büyük harfler ile göstereceğiz. $f(t)$ fonksiyonun dönüşümü $F(s)$, $y(t)$ fonksiyonunun dönüşümü $Y(s)$.*

Örnek 40.4. *$f(t) = 1$ fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.*

Çözüm

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

□

Örnek 40.5. *$f(t) = e^{at}$, a sabit fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.*

Çözüm

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}, \; s > a$$

□

Teorem 40.6. *Laplace dönüşümü lineerdir:$f(t)$, $g(t)$ fonksiyonları ve a, b sabitleri için*

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$$

[1] Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827) Fransız matematikçi, Pariste profesörlük yapmış ve Napoleon Bonaparte 1 senelik öğrencisi olmuşltur.

Proof.

$$L\left(af+bg\right)=\int_0^\infty e^{-st}\left(af\left(t\right)+bg\left(t\right)\right)dt=a\int_0^\infty e^{-st}f\left(t\right)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g\left(t\right)dt=aL\left(f\right)+bL\left(g\right)$$

□

Teorem 40.7. *Ters Laplace dönüşümü lineerdir:* $f\left(t\right),g\left(t\right)$ *fonksiyonları ve* a,b *sabitleri için*

$$L^{-1}\left(af+bg\right)=aL^{-1}\left(f\right)+bL^{-1}\left(g\right)$$

Örnek 40.8. $\cosh at$ *ve* $\sinh at$ *fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini bulunuz.*

Çözüm

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad \cosh at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\\
&\Rightarrow\quad L\left(\cosh at\right)=L\left(\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right)=\frac{1}{2}L\left(e^{at}\right)+\frac{1}{2}L\left(e^{-at}\right)\\
&=\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}\right)=\frac{s}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\quad \sinh at=\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\\
&\Rightarrow\quad L\left(\sinh at\right)=L\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)=\frac{1}{2}L\left(e^{at}\right)-\frac{1}{2}L\left(e^{-at}\right)\\
&=\quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}\right)=\frac{a}{s^2-a^2}
\end{aligned}$$

$f\left(t\right)$	$F\left(s\right)=L\left(f\right)$	$f\left(t\right)$	$F\left(s\right)=L\left(f\right)$	$f\left(t\right)$	$F\left(s\right)=L\left(f\right)$
1	$\frac{1}{s}$	$e^{at}\cos wt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$\cos at-\cos bt$	$\frac{\left(b^2-a^2\right)s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$e^{at}\sin wt$	$\frac{w}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$
t^2	$\frac{2!}{s^3}$	te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\frac{2(1-\cosh at)}{t}$	$\ln\frac{s^2-a^2}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^ne^{at}	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$\frac{2(1-\cos wt)}{t}$	$\ln\frac{s^2+w^2}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t\sin wt$	$\frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{\sin wt}{t}$	$\arctan\frac{w}{s}$
$\cos wt$	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$1-\cos wt$	$\frac{w^2}{s(s^2+w^2)}$	$t^a,\ a>-1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$\sin wt$	$\frac{w}{s^2+w^2}$	$wt-sinwt$	$\frac{w^3}{s^2(s^2+w^2)}$	$t^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\sin wt-wt\cos wt$	$\frac{2w^3}{(s^2+w^2)^2}$	$t^{1/2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sin wt+wt\cos wt$	$\frac{2w^2s}{(s^2+w^2)^2}$	$u\left(t-c\right)$	$\frac{1}{s}e^{-sc}$

Teorem 40.9. $f\left(t\right)$ *fonksiyonunun Laplace dönüşümü* $F\left(s\right)$ *olsun.* $e^{at}f\left(t\right)$ *fonksiyonunun Laplace dönüşümü* $F\left(s-a\right)$ *dır*

$$L\left(f\left(t\right)\right)=F\left(s\right)\Rightarrow L\left(e^{at}f\left(t\right)\right)=F\left(s-a\right)$$

ve

$$e^{at}f\left(t\right)=L^{-1}\left(F\left(s-a\right)\right)$$

Proof.

$$F\left(s-a\right)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f\left(t\right)dt=\int_0^\infty e^{-st}\left(e^{at}f\left(t\right)\right)dt=L\left(e^{at}f\left(t\right)\right)$$

□

Örnek 40.10. $e^{at}\cos wt,e^{at}\sin wt$ *fonksiyonlarının Laplace dönüşümünü bulunuz.*

Çözüm

$$\begin{aligned}
F(s) &= L(\cos wt) = \frac{s}{s^2+w^2} \Rightarrow \\
F(s-a) &= L\left(e^{at}\cos wt\right) = \frac{s-a}{(s-a)^2+w^2} \\
F(s) &= L(\sin wt) = \frac{w}{s^2+w^2} \Rightarrow \\
F(s-a) &= L\left(e^{at}\sin wt\right) = \frac{w}{(s-a)^2+w^2}
\end{aligned}$$

□

Örnek 40.11.

$$F(s) = L(f(t)) = \frac{3}{s^2+100}$$

ise f fonksiyonu nedir?

Çözüm

$$L(f(t)) = \frac{3}{s^2+100} \Rightarrow f(t) = L^{-1}\left(\frac{3}{s^2+100}\right) = L^{-1}\left(\frac{\frac{3}{10}10}{s^2+10^2}\right) = \frac{3}{10}L^{-1}\left(\frac{10}{s^2+10^2}\right) = \frac{3}{10}\sin(10t)$$

□

Örnek 40.12.

$$F(s) = L(f(t)) = \frac{25}{s^2-4s+29}$$

ise f fonksiyonu nedir?

Çözüm

$$L(f(t)) = \frac{25}{s^2-4s+29} = \frac{25}{(s-2)^2+25} \Rightarrow f(t) = L^{-1}\left(\frac{5.5}{(s-2)^2+5^2}\right) = 5L^{-1}\left(\frac{5}{(s-2)^2+5^2}\right) = 5e^{2t}\sin(5t)$$

□

Örnek 40.13.

$$L(f) = \frac{3s-137}{s^2+2s+401}$$

olduğuna göre $f(t)$ fonksiyonu nedir?

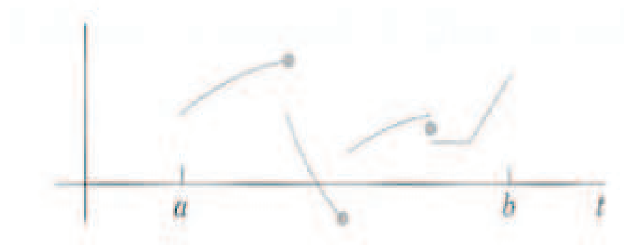
Çözüm

$$\begin{aligned}
L(f) &= \frac{3s-137}{s^2+2s+401} = \frac{3s-137}{(s+1)^2+400} = \frac{3(s+1)-140}{(s+1)^2+20^2} \\
&= 3\frac{(s+1)}{(s+1)^2+20^2} - \frac{140}{20}\frac{20}{(s+1)^2+20^2} \Rightarrow \\
f &= L^{-1}\left(3\frac{(s+1)}{(s+1)^2+20^2} - \frac{140}{20}\frac{20}{(s+1)^2+20^2}\right) \\
&= 3L^{-1}\left(\frac{(s+1)}{(s+1)^2+20^2}\right) - 7L^{-1}\left(\frac{20}{(s+1)^2+20^2}\right) \\
&= 3e^{-t}\cos(20t) - 7e^{-t}\sin(20t)
\end{aligned}$$

□

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olması için sürekli olması gerekmez ancak belli koşulları sağlamalıdır.

Tanım 40.14. *Herbir sonlu aralıkta sürekli olan $f(t)$ fonksiyonuna parçalı sürekli fonksiyon denir.*



Teorem 40.15. *$f(t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve*

$$|f(t)| \leq Me^{\lambda t}, \ M > 0$$

koşulunu sağlıyorsa, fonksiyonun Laplace dönüşümü vardır.

41. Türev ve İntegrallerin Laplace Dönüşümü

Teorem 41.1. *$f(t)$ fonksiyonu $(n-1)$. mertebeye kadar türevleri sürekli olsun*

$$\begin{aligned}
L(f') &= sL(f) - f(0) \\
L(f'') &= s^2 L(f) - sf(0) - f'(0) \\
L(f''') &= s^3 L(f) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) \\
&\ldots \\
L\left(f^{(n)}\right) &= s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Örnek 41.2. *$f(t) = t \sin wt$ fonksiyonu için $L(f'')$ değerini hesaplayınız.*

Çözüm

$$\begin{aligned}
L(f'') &= s^2 L(f) - sf(0) - f'(0) \\
f(0) &= 0 \\
f'(t) &= \sin wt + wt \cos wt \Rightarrow \\
f'(0) &= 0 \Rightarrow \\
L(f'') &= s^2 L(f) = s^2 \frac{2ws}{(s^2+w^2)^2} = \frac{2ws^3}{(s^2+w^2)^2}
\end{aligned}$$

□

Teorem 41.3. *$F(s)$ fonksiyonu $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü olsun.*

$$L\left(\int_0^t f(\alpha)\, d\alpha\right) = \frac{1}{s} F(s) \Rightarrow \int_0^t f(\alpha)\, d\alpha = L^{-1}\left(\frac{1}{s} F(s)\right)$$

Örnek 41.4. *Teorem 41.3 ü kullanarak*

$$\frac{1}{s(s^2+w^2)} \ \textit{ve} \ \frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$$

fonksiyonlarının ters Laplace dönüşümlerini bulunuz.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{(s^2+w^2)} \Rightarrow L^{-1}(F(s)) = \frac{\sin wt}{w} = f(t) \Rightarrow \\
L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+w^2)}\right) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right) = \int_0^t \frac{\sin w\alpha}{w} d\alpha = -\frac{1}{w^2}\cos w\alpha\Big|_0^t = \frac{1}{w^2}(1-\cos wt) = g(t) \\
L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}\right) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{s(s^2+w^2)}\right) = \int_0^t \frac{1}{w^2}(1-\cos w\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{w^2}\left(\alpha - \frac{1}{w}\sin w\alpha\right)\Big|_0^t \\
&= \frac{1}{w^2}\left(t - \frac{\sin wt}{w}\right)
\end{aligned}
$$

□

42. BDP problemlerine uygulamaları

Şimdi Laplace dönüşümünün BDP problemlerinin çözümüne nasıl uygulandğını görelim:

$$
\begin{aligned}
y'' + ay' + by &= r(t) \qquad (42.1)\\
y(0) &= k_0, \\
y'(0) &= k_1
\end{aligned}
$$

BDP problemini ele alalım. (42.1) denklemine Laplace dönüşümü uygulayalım:

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow L(y''+ay'+by) = L(r(t)) \\
&\Rightarrow L(y'') + aL(y') + bL(y) = R(s) \\
&\Rightarrow \left(s^2L(y) - sy(0) - y'(0)\right) + a(sL(y) - y(0)) + bL(y) = R(s) \\
&\Rightarrow \left(s^2+as+b\right)Y(s) = R(s) + (s+a)k_0 + k_1 \\
&\Rightarrow Y(s) = L(y) = \frac{R(s)+(s+a)k_0+k_1}{s^2+as+b} \\
&\Rightarrow y(t) = L^{-1}\left(\frac{R(s)+(s+a)k_0+k_1}{s^2+as+b}\right)
\end{aligned}
$$

Örnek 42.1.

$$
\begin{aligned}
y'' - y &= t, \\
y(0) &= 1, \; y'(0) = 1
\end{aligned}
$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow && L\left(y''-y\right)=L\left(t\right)\\
&\Rightarrow && L\left(y''\right)-L\left(y\right)=\frac{1}{s^2}\\
&\Rightarrow && \left(s^2L\left(y\right)-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)\right)-L\left(y\right)=\frac{1}{s^2}\\
&\Rightarrow && \left(s^2-1\right)L\left(y\right)=\frac{1}{s^2}+s+1\\
&\Rightarrow && L\left(y\right)=\frac{1}{s^2\left(s^2-1\right)}+\frac{s+1}{\left(s^2-1\right)}\\
&= && \left(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}\right)+\frac{1}{s-1}\\
&\Rightarrow && y=L^{-1}\left(\left(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2}\right)+\frac{1}{s-1}\right)\\
&= && L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)\\
&= && \sinh t-t+e^t
\end{aligned}
$$

□

Örnek 42.2.

$$
\begin{aligned}
y''+16y &= 5\sin x,\\
y\left(0\right) &= 0,\ y'\left(0\right)=0
\end{aligned}
$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow && L\left(y''+16y\right)=L\left(5\sin x\right)\\
&\Rightarrow && L\left(y''\right)+16L\left(y\right)=\frac{5}{s^2+1}\\
&\Rightarrow && \left(s^2L\left(s\right)-sy\left(0\right)-y'\left(0\right)\right)+16L\left(y\right)=\frac{5}{s^2+1}\\
&\Rightarrow && \left(s^2+16\right)L\left(y\right)=\frac{5}{s^2+1}\\
&\Rightarrow && L\left(y\right)=\frac{5}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+16\right)}=\frac{5}{15}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+16}\right)\\
&\Rightarrow && y=L^{-1}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+16}\right)\right)\\
&= && \frac{1}{3}\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)-\frac{1}{4}L^{-1}\left(\frac{4}{s^2+16}\right)\right)\\
&= && \frac{1}{3}\left(\sin x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)
\end{aligned}
$$

□

Örnek 42.3.

$$
\begin{aligned}
y''+y &= 2t,\\
y\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\pi}{2},\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2
\end{aligned}
$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm Önce çözümü 0 noktasına ötelemeliyiz.

$$t = x + \frac{\pi}{4}$$

dönüşümü ile t değişkenine bağlı fonksiyonu x değişkenine dönüştürmüş oluruz. Buna göre BDP yi

$$\begin{aligned} y'' + y &= 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \\ y(0) &= \frac{\pi}{2},\ y'(0) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad L(y'' + y) = L\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&\Rightarrow \quad L(y'') + L(y) = 2L\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2L(x) + \frac{\pi}{2}L(1) \\
&\Rightarrow \quad \left(s^2 L(s) - sy(0) - y'(0)\right) + L(y) = \frac{2}{s^2} + \frac{\pi}{2s} \\
&\Rightarrow \quad \left(s^2 + 1\right) L(y) = \frac{2}{s^2} + \frac{\pi}{2s} + \frac{\pi s}{2} + 2 \\
&= \quad \frac{1}{2s^2}(\pi s + 4)\left(s^2 + 1\right) \\
&\Rightarrow \quad L(y) = \frac{(\pi s + 4)}{2s^2} = \frac{\pi}{2s} + \frac{2}{s^2} \\
&\Rightarrow \quad y = L^{-1}\left(\frac{\pi}{2s} + \frac{2}{s^2}\right) \\
&= \quad \frac{\pi}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) \\
&= \quad \frac{\pi}{2} + 2x = \frac{\pi}{2} + 2\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 2t
\end{aligned}$$

□

43. Basamak Fonksiyonu (Heaviside[2] Fonksiyonu)

Makine mühendisliğinde ve elektrik mühendisliklerinde sistemin kapalı veya açık olmasını ifade eden önemli bir fonksiyondur birim basamak fonksiyonudur.

Fig. 117. Unit step function $u(t)$

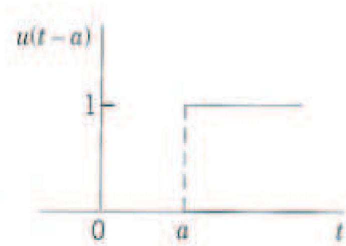


Fig. 118. Unit step function $u(t - a)$

Tanım **43.1.**

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t > a \end{cases}, \quad a \geq 0$$

fonksiyonuna birim basamak fonksiyonu veya Heaviside fonksiyonu denir.

[2]Oliver Heaviside (1850-1925), ingiliz elektrik mühendisi

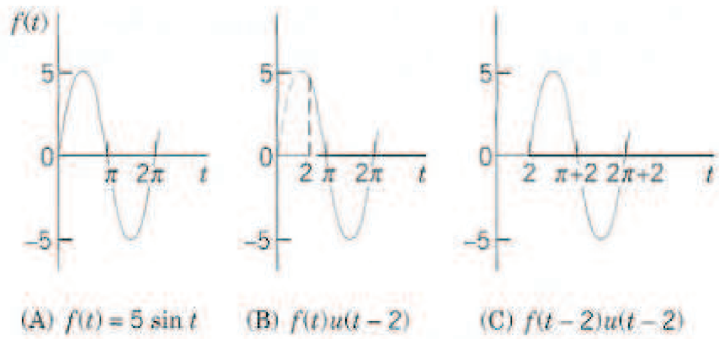


Fig. 119. Effects of the unit step function: (A) Given function. (B) Switching off and on. (C) Shift.

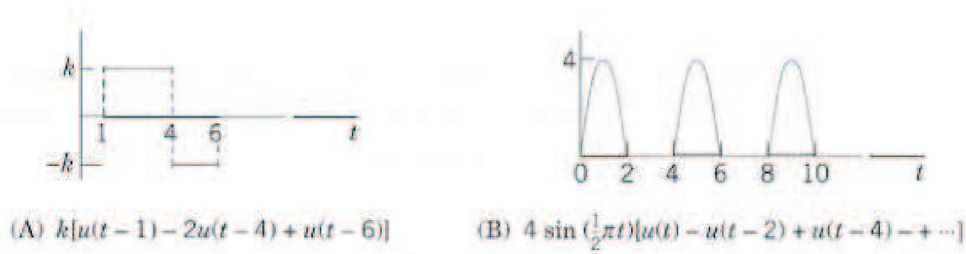


Fig. 120. Use of many unit step functions.

Örnek 43.2.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi \\ 1, & \pi < t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases},$$

fonksiyonunu birim basamak fonksiyonu cinsinden ifade ediniz.

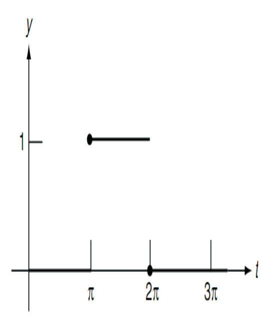


Fig. 6.4. The square impulse $u(t-\pi) - u(t-2\pi)$

Çözüm

$$y(t) = u(t-\pi) - u(t-2\pi)$$

□

Örnek 43.3.

$$y(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 2, & 1 < t < 2 \\ 3, & t > 3 \end{cases},$$

fonksiyonunu birim basamak fonksiyonu cinsinden ifade ediniz.

Çözüm

$$y(t) = -(u(t+1) - u(t)) + (u(t) - u(t-1)) + 2(u(t-1) - u(t-2)) + 3u(t-3)$$

□

Tanım 43.4.

Örnek 43.5.

$$y(t) = \begin{cases} t, & -1 < t < 0 \\ t^2, & 0 < t < 1 \\ 2\cos t, & 1 < t < 2 \\ 2\sin t, & t > 3 \end{cases},$$

fonksiyonunu birim basamak fonksiyonu cinsinden ifade ediniz.

Çözüm

$$y(t) = t(u(t+1) - u(t)) + t^2(u(t) - u(t-1)) + 2\cos t(u(t-1) - u(t-2)) + 2\sin t u(t-3)$$

□

Örnek 43.6. *Birim basamak fonksiyonunun Laplace dönüşümünü hesaplayınız.*

Çözüm

$$L(u(t-a)) = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a)\,dt = \int_a^\infty e^{-st} dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

Tanım 43.7. *$f(t)$ fonksiyonunun öteleme fonksiyonu*

$$\widetilde{f}(t) = f(t-a)\,u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t > a \end{cases}$$

olarak verilir.

□

Teorem 43.8. *$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü $F(s)$ ise $\widetilde{f}(t)$ öteleme fonksiyonunun Laplace dönüşümü $e^{-as}F(s)$ dir.*

$$F(s) = L(f) \Rightarrow e^{-as}F(s) = L\left(\widetilde{f}\right) = L(f(t-a)\,u(t-a))$$

Teorem 43.9.

$$L(f(t)\,u(t-a)) = e^{-as}L(f(t+a))$$

Örnek 43.10. *$(t-1)^2 u(t-1)$ ve $t^2u(t-1)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerini bulunuz.*

Çözüm

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad L\left((t-1)^2 u(t-1)\right) = e^{-s}L\left(t^2\right) = \frac{2e^{-s}}{s^3} \\ &\Rightarrow \quad L\left(t^2u(t-1)\right) = e^{-s}L\left((t+1)^2\right) \\ &= \quad e^{-s}\left(L\left(t^2\right) + 2L(t) + L(1)\right) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) \end{aligned}$$

□

Örnek 43.11.

$$\begin{aligned} y'' + 16y &= \begin{cases} 48e^{2t}, & 0 < t < 4 \\ 0, & t > 4 \end{cases} \\ y(0) &= 0,\ y'(0) = 0 \end{aligned}$$

BDP nin çözümünü bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} y'' + 16y &= 48e^{2t}\left(u(t) - u(t-4)\right) \\ y(0) &= 0,\ y'(0) = 0 \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda Laplace dönüşümünü denkleme uyguladığımızda

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad L\left(y'' + 16y\right) = L\left(48e^{2t}\left(u(t) - u(t-4)\right)\right) \\ &\Rightarrow \quad L\left(y''\right) + 16L(y) = 48L\left(e^{2t}u(t)\right) - 48L\left(e^{2t}u(t-4)\right) \end{aligned}$$

ve burada

$$F(s) = L(f) \Rightarrow e^{-as}F(s) = L\left(f(t-a)\,u(t-a)\right)$$

$$L\left(f(t)\,u(t-a)\right) = e^{-as}L\left(f(t+a)\right)$$

ifadelerini kullanırsak

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \left(s^2L(y) - sy(0) - y'(0)\right) + 16L(y) = \frac{48}{s-2} - \frac{48e^{-4s}}{s-2} = \frac{48\left(1 - e^{-4s}\right)}{s-2} \\ &\Rightarrow \quad L(y) = \frac{48\left(1 - e^{-4s}\right)}{(s-2)\left(s^2+16\right)} = \left(\frac{12}{5(s-2)} - \frac{24}{5\left(s^2+16\right)} - \frac{12s}{5\left(s^2+16\right)}\right)\left(1 - e^{-4s}\right) \\ &\Rightarrow \quad y = \frac{12}{5}\left(L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)}\right) - 2L^{-1}\left(\frac{1}{\left(s^2+16\right)}\right) - L^{-1}\left(\frac{s}{\left(s^2+16\right)}\right)\right) \\ &\qquad -\frac{12}{5}\left(L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{(s-2)}\right) - 2L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{\left(s^2+16\right)}\right) - L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{\left(s^2+16\right)}\right)\right), \\ &= \quad \frac{12}{5}\left(e^{2t} - \frac{2}{4}\sin 4t - \cos 4t\right) - \frac{12}{5}\left(e^{2(t-4)} - \frac{2}{4}\sin 4(t-4) - \cos 4(t-4)\right)u(t-4) \end{aligned}$$

□

Örnek 43.12. *Bir RLC devresinde $C = 10^{-2}F(arad),\ L = 0.1H(enry), R = 11\Omega$ ve 2π saniyeye kadar verilen elektromotive kuvvet $E(t) = 100\sin(400t), 0 < t < 2\pi$ ve sonra bir kuvvet verilmemektedir: $E(t) = 0,\ t > 2\pi$. Başlangıçta elektrik yükü ve akım olmadığına göre herhangi zamandaki elektrik yükünü bulunuz.*

Çözüm

$$
\begin{aligned}
q' &= I, V_R = RI, V_C = \frac{1}{C}q, V_L = LI' \\
&\Rightarrow RI + \frac{1}{C}q + LI' = E(t) \\
&\Rightarrow Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = E(t) \\
&\Rightarrow 0.1q'' + 11q' + 10^2 q = \begin{cases} 100\sin(400t), & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases} \\
q(0) &= 0, q'(0) = 0 \\
&\Rightarrow q'' + 110q' + 10^3 q = \begin{cases} 10^3\sin(400t), & 0 < t < 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases} \\
&= 10^3 \sin(400t)(1 - u(t - 2\pi)) \\
&\Rightarrow L\left(q'' + 110q' + 10^3 q\right) = L\left(10^3 \sin(400t)(1 - u(t-2\pi))\right) \\
&\Rightarrow L(q'') + 110L(q') + 10^3 L(q) = 10^3\left(L(\sin(400t)) - L(\sin(400t)u(t-2\pi))\right) \\
&\Rightarrow \left(s^2 L(q) - sq(0) - q'(0)\right) + 110(sL(q) - q(0)) + 10^3 L(q) \\
&= 10^3\left(L(\sin(400t)) - L(\sin(400(t-2\pi))u(t-2\pi))\right) \\
&\Rightarrow \left(s^2 + 110s + 10^3\right)L(q) = \frac{2*10^4}{s^2+400} - 10^3 e^{-2\pi s}\frac{20}{s^2+400} = \frac{2*10^4*\left(1-e^{-2\pi s}\right)}{s^2+400} \\
&\Rightarrow L(q) = \frac{2*10^4*\left(1-e^{-2\pi s}\right)}{(s^2+400)(s+10)(s+100)} \\
&= \left(\frac{1}{45\,000(s+10)} - \frac{\frac{11}{520\,000}s - \frac{3}{26\,000}}{s^2+400} - \frac{1}{936\,000(s+100)}\right)*2*10^4*\left(1-e^{-2\pi s}\right) \\
&= \left(\frac{1}{45\,000(s+10)} - \frac{\frac{11}{520\,000}s - \frac{3}{26\,000}}{s^2+400} - \frac{1}{936\,000(s+100)}\right)*2*10^4 \\
&\quad -\left(\frac{1}{45\,000(s+10)} - \frac{\frac{11}{520\,000}s - \frac{3}{26\,000}}{s^2+400} - \frac{1}{936\,000(s+100)}\right)*2*10^4*e^{-2\pi s} \\
&\Rightarrow q = \frac{2*10^4}{45\,000}L^{-1}\left(\frac{1}{s+10}\right) - \frac{11*2*10^4}{520\,000}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+400}\right) + \frac{3}{20*26\,000}*2*10^4 L^{-1}\left(\frac{20}{s^2+400}\right) \\
&\quad -\frac{2*10^4}{936\,000}L^{-1}\left(\frac{1}{(s+100)}\right) \\
&\quad -\frac{2*10^4}{45\,000}L^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi s}}{s+10}\right) + \frac{11*2*10^4}{520\,000}L^{-1}\left(\frac{se^{-2\pi s}}{s^2+400}\right) - \frac{3}{20*26\,000}*2*10^4 L^{-1}\left(\frac{20e^{-2\pi s}}{s^2+400}\right) \\
&\quad +\frac{2*10^4}{936\,000}L^{-1}\left(\frac{e^{-2\pi s}}{(s+100)}\right) \\
&= \frac{4}{9}e^{-10t} - \frac{11}{26}\cos(20t) + \frac{3}{26}\sin(20t) - \frac{5}{234}e^{-100t} \\
&\quad -\left(\frac{4}{9}e^{-10t} - \frac{11}{26}\cos(20t) + \frac{3}{26}\sin(20t) - \frac{5}{234}e^{-100t}\right)u(t-2\pi) \\
&= \left(\frac{4}{9}e^{-10t} - \frac{11}{26}\cos(20t) + \frac{3}{26}\sin(20t) - \frac{5}{234}e^{-100t}\right)(1 - u(t-2\pi))
\end{aligned}
$$

□

Bibliography

[1] L. Lamport. **LaTeX A Document Preparation System** Addison-Wesley, California 1986.