7. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

MATRİSLER

Birinci derece lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde matris kavramı ve özellikleri doğal olarak ortaya çıkmaktadır. Bir matris A(mxn) şeklinde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. A matrisinin 'i' inci satırı 'j' inci sütununda bulunan elemanı a_{ij} ***ile gösterilir.*** a_{ij} ***ler***
reel olabileceği gibi kompleks de olabilir
A matrisinin satır ve sütunlarının yer değiştirilmesiyle elde edilen matrise Anın 'tranpozesi' denir ve A^T ***ile gösterilir.***
Ayrıca $\overline{a_{ij}}$ ***ile*** a_{ij} ***nin kompleks eşleniği anlaşılmaktadır.*** $\overline{A}$ ***a A matrisinin eşleniği denir .(Eşlenik matriste sayı reel ise kendisine sanal ise ters işaretlisine eşittir.)***
Ayrıca $A^* = \overline{A}^T$ ***dir. Burada*** A^* ***a A nın eşi(adjointi)denir.***

Örnek:

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3+5i \\ 1-i & -8+3i \end{pmatrix}$ ***ise*** A^T, $\overline{A}$ ***ve*** A^* ***ı gösteriniz.***

$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 3+5i & -8+3i \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3-5i \\ 1+i & -8-3i \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & 1+i \\ 3-5i & -8-3i \end{pmatrix}$

özellikler:

- ***Eşitlik : A(mxn) ve B(mxn) iki matrisin eşit olması için karşılıklı elemanlar birbirine eşit olmalıdır***

- ***Toplam: A(mxn) ve B(mxn) iki matrisin toplamı karşılıklı elemanlarının birbirleriyle toplamıdır. A+B=C Toplamada değişme ve birleşme özellikleri vardır***
- ***Sıfır matris : bütün elemanları 0 olan matristir***

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(5x4)}$$

- ***Skalerle Çarpım: A(mxn) matrisinin tüm elemanlarının o skalerle çarpımıdır.***
- ***Çarpım: iki matrisin çarpılabilmesi için birinci matrisin sütun sayısı ikinci matrisin satır sayısına eşit olmalıdır.***

A(mxn)*B(nxt)=C(mxt) dır. Çarpma işleminde değişme özelliği yoktur.

- $(AB)^T=B^TA^T$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1}= A$
- $(A^T)^T= A$
- $(A+B)^T= A^T+B^T$

$A = A^T$ ***ise Simetrik matris***
$A^T= -A$ ***ise ters simetrik/antimetrik matris(köşegenler 0 dır)***
$A^*= A^T =A$ ***ise hermitian matris***
$A^*= A^T =-A$ ***ise ters hermitian matristir.***

- ***Bir matrisin izi köşegen üzerindeki elemanların toplamına eşittir. Tr(A) ile gösterilir.***

$$Tr(A)= a_{11}+a_{22}+..............+a_{nn}$$

dır. Ters simetrik matrisin izi 0 dır. Tranzpozenin izi kendisine eşittir.

A^{-1} *nin hesabı*

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ ***olmak üzere***

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

dır.

Örnek:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ***ise*** $A^{-1}=?$

Çözüm:

$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ ***ile***

$\det A_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=-2 \quad A_{11}^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}/\det A_{11}$ ***ile***

$\det A_{12}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=5 \quad A_{12}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}/\det A_{12}$ ***ile***

$\det A_{22}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=-7 \quad A_{22}^{-1}==\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}/\det A_{22}$ ***ile***

Vektörlerin Çarpımı

Matris çarpımlarının özel hali olarak ele alınabilir. Eğer A ve B matrisleri (1xn) ve(nx1) satır ve sütun matrisler ise ve bunlara x^T ve y vektörleri denilirse;

$$\mathbf{x^T y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \textbf{dır.}$$

İki vektörün çarpımı ile ilgili diğer bir çarpımda **'skaler çarpım'** veya **'iç çarpım'** dır. Bu çarpım;

$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ **veya** $\mathbf{(x,y)=x^T}\overline{y}$ **(eşlenik)**

şeklindedir. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$, $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$, $(x,\alpha y)=\overline{\alpha}(x,y)$

$(x,x)=\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = |x_i|^2$ $\qquad x^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

LİNEER BAĞIMSIZLIK

$x^{(1)}, x^{(2)},\ldots\ldots\ldots\ldots, x^{(k)}$ vektörleri için $c_1, c_2,$ $,c_k$ lardan biri sıfırdan farklı olmak üzere

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)}, \qquad +c_k x^k = 0$$

ise lineer bağımlıdır. $c_1= c_2=$ $=c_k=0$ ise lineer bağımsızdır.

- **$x^{(1)}, x^{(2)}\ldots\ldots\ldots\ldots, x^{(k)}$ vektörlerinin bağımsız olması için gerekli ve yeterli koşul $\det(x)\neq 0$ olmalıdır.**

Örnek 1:

$x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, x^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, x^{(3)}=\begin{pmatrix}-4\\1\\-11\end{pmatrix}$ vektörlerin lineer bağımlı olup olmadığını araştırınız .lineer bağımlı ise aralarındaki lineer bağıntıyı bulunuz.

$\det(x_{ij})=$ $\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & -11\end{vmatrix}=0$

$x^{(1)},x^{(2)},x^{(3)}$ lineer bağımlıdır.

$$c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + c_3 x^{(3)} = 0$$

ile

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array}\right)$$ **yapılan işlemlerle($-2R_1+R_2$ VE R_1+R_2)**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

mevcut denklem sayısı=2, bilinmeyen sayısı=3 rank=3-2 ,1 bilinmeyen keyfi olarak seçilebilir. buradan c_3 keyfi olarak seçilerek diğerleri belirlenir $c_3=-1$ seçilirse

$c_1+2c_2-4c_3=0$

$c_2-3c_3=0$

ile

$c_1=2 \quad ,c_2=-3$

$$2\,x^{(1)} - 3\,x^{(2)} - x^{(3)} = 0$$

bulunur.

ÖRNEK 2: $y_1=\sin x, y_2=\cos x$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğunu gösterin (y_i lerin lineer bağımsız olması durumunda Wronski determinantı sıfırdan farklıdır.)

$$w=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}=-(\sin x)^2-(\cos^2 x)=-1\neq 0$$

öyleyse verilen fonksiyonlar lineer bağımsızdır.

- ******Her matris için anahtar:***

$c_k x^k$ denklem takımını kur 0 dan farklı çözüm varsa lineer bağımlıdır.

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİ

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_{3}+......................+a_{1n}x_n=k_1$

.

.

.

.

$a_{n1}\, x_1+a_{n2}x2+.........................+a_{nn}x_n=k_n$

n bilinmeyenli n denklemden oluşan (1)sistemine 'cebirsel lineer denklem sistemi' denir. Bu sistem basit olarak Ax=K şeklinde verilebilir. Burada A(nxn) matrisi ve K vektörü verilenler, x ise aranandır.
Eğer Ax=K sisteminde

K=0 ise bu sisteme HOMOGEN SİSTEM
K≠0 ise bu sisteme NONHOMOGEN SİSTEM
dir.

- ***Eğer Amatrisi nonsingüler ise(detA≠0) Ax=K sisteminin tek çözümü bulunur.***

$$x=A^{-1}*K$$

- ***Amatrisi singüler ise (detA=0) ya çözüm yoktur veya varsa tek değildir. A matrisi singüler olduğundan tersi yoktur dolayısıyla yukarıdaki gibi bir çözümü yoktur.***

- ***Ax=0 homogen sistemi sıfırdan farklı sonsuz sayıda çözüme sahiptir***

- ***Ax=K sisteminin çözümü***

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & . & . & a_{1n} & K_1 \\ a_{21} & . & . & a_{2n} & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & a_{nn} & K_n \end{array}\right]$$

Genişletilmiş matrise elemanter satır işlemleri uygulanarak A matrisi üçgen matris(köşegen altındaki elemanlar 0 olan matris) haline getirilir ve genişletilmiş matristen yaralanılarak bilinmeyenler (x_i i=1.......n) bulunur. Bilinmeyenler sistemin çözümüdür.

Elemanter satır işlemleri

1. İki satırın yerlerini değiştirmek

2. Bir satırı skaler sayı ile çarpmak

3. Skalerle çarpılmış bir satırı diğer bir satırla toplamak

det$A\neq 0$ ise A matrisi elemanter satır işlemleri ile I(birim matrise) dönüştürülebilir A matrisinin I matrisine dönüştürülmesinde kullanılan elemanter satır işlemleri I matrisine uygulanırsa A^{-1} matrisi (ters matris) elde edilir.

***(* **[A | I] genişletilmiş matrisi ile belirlenir.)**

Örnek

A=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ **matrisinin tersini elemanter satır işlemleri yardımıyla bulunuz.**

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ **R_1+R_2 ve $-2R_1+R_3$ satır işlemleri ile**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3/10} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_3+R_2 \text{ ve} -2R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{8}{10} & \frac{-6}{10} & \frac{-2}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \xrightarrow{-1*R_2+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{-7}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

[I | A^{-1}]

Matris Fonksiyonlar:

Bazen vektörler ve matrisler ,elemanları ‘t’ değişkenine bağlı fonksiyonlardan oluşacak şekilde tanımlanabilir. Bu durumda bir vektör ile matris

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & . & a_{1n}(t) \\ . & . & . \\ a_{n1}(t) & . & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

formunda yazılır. Bu şekilde tanımlanmış bir A(t) matrisinin tüm elemanları bir $t=t_0$ noktasında veya $\alpha<t<\beta$ aralığında sürekli ise A(t) ye sürekli denir. Benzer şekilde A(t) nin her elemanı diferansiyellenebilir ise A(t) ye **diferansiyellenebilir** denir. ve

$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)$ şeklinde tanımlanır. A(t) nin integrali ise;

$$\int_a^b A(t)dt = \int_a^b a_{ij}(t)dt$$

dir.

A(t)=$\begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix}$ *ise* A'(t) ve $\int_a^b A(t)dt = ?$

A'(t)=$\begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}$ *ise* ve

$$\int_0^\pi A(t)dt = \left.\begin{pmatrix} -\cos t & t^2/2 \\ t & -\sin t \end{pmatrix}\right|_0^\pi = \begin{pmatrix} 1 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\pi^2}{2} \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

Analizin birçok kuralı matris fonksiyonuna genişletilebilir. Bunlar aşağıdadır.

$\frac{d}{dt}(CA) = C\frac{dA}{dt}$ **C sabit** $\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$

$\frac{d}{dt}(A.B) = B\frac{dA}{dt} + A\frac{dB}{dt}$

Örnek

$2x_1+4x_2+3x_3+2x_4=2$
$3x_1+6x_2+5x_3+2x_4=2$
$2x_1+5x_2+2x_3-3x_4=3$
$4x_1+5x_2+14x_3+14x_4=11$ denklem sistemini çözünüz.

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 11 \end{array}\right]$$

2.satırla 3 satırı yer değiştirelim

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 11 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}$$

$(-1)R_1+R_2$, $(-3/2)\,R_1+R_3$ ve $(-2)\,R_1+R_4$ satır işlemlerini uygular ve daha sonra 3 satırı 2 ile çarparsak($2*R_3$

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & 7 \end{array}\right]$$

elde edilir. Daha sonra da sırasıyla ($3R_2+R_4$), ($R_4/5$) ve ($-R_3+R_4$) satır işlemleri ile

$$[A|K]=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

elde edilir. $x_3-2x_4=-2$

$$\begin{matrix} R_1-2R_4 \\ R_2+5R_4 \\ R_3+2R_4 \\ R_4 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right], \quad \textbf{ve} \quad \begin{matrix} R_1-3R_3 \\ R_2+R_3 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

elemanter işlemlerle

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -66 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

x_1=-66, x_2=27, x_3=6, x_4=4 bulunur. $x_{genel} = \begin{pmatrix} 66 \\ 27 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bu forma 'Gauss Jordan Eleminasyonu'denir.

ÖDEV

1) A*x=K için

$3x_1-x_2+2x_3=4$
$2x_1+x_2+x_3=-1$
$x_1+3x_2 = 2$ sisteminin genel çözümünü bulunuz.

2) A*x=K Şeklinde

$$\left[A|K\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & H \end{array}\right]$$

a)sistemin çözülebilmesi için H=? (H=5/2)
b)genel çözümü hesaplayınız.

3) A*x=0 homogen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -6 & 7 & 8 & 0 \\ 4 & -13 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

denklem sistemini çözünüz.
çözüm: ($x_3=c_1$, $x_4=c_2$, $x_2=-(9c_1+17c_2)$, $x_1=-((61/2)c_1+55c_2)$

4) A*x=K sisteminin genel çözümünü hesaplayınız.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \qquad K=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{array}\right]$$

($-2R_1+R_2$) ve (R_1+R_3) satır işlemleri uygularsak

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{array}\right]$$

buradan (R_2-R_3) ve ($R_2/5$) ile

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ ve } R_2+R_1 \text{ ile } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ olur.}$$

Bilinmeyen sayısı(n)=3, elimizde gerçekten var olan denklem sayısı(u)=2 o halde rank(r)=2 dir. (rank= elimizde gerçekten var olan denklem sayısıdır) (*n-r) tane keyfi parametre seçilebilir* Bu durumda bir bilinmeyeni keyfi olarak seçebiliriz.

$x_1+2x_2=17/5$

$x_3=-3/5$

Özel çözüm için (A*x=K nın çözümü)

$x_1+2x_2=17/5$

$x_3=-3/5$

den $x_2=c$ seçersek $x_1=17/5-2c$ olur.

$$X= x_{özel}+x_{homojen} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/5-2c \\ c \\ -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/5 \\ 0 \\ -3/5 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verilen sistem A*x=0 (homojen olsa)

$x_1+2x_2=0$

$x_3=0$

olurdu.

homojen çözüm için ($x_{homojen}$) $x_3=0$, x_2, x_1 i istediğimiz gibi seçebiliriz.

$x_2=c$ seçersek $x_1=-2c$ olur.

$$\mathbf{x}_{homojen}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2c \\ c \\ 0 \end{bmatrix}=c\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ödevlerin çözümleri

1)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{K}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A*x=K}$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \textbf{ 1.satırı 3.satırla yer değiştirelim } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ -2R_1+R_2 \\ -3R_1+R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -10 & 2 & -2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ -2R_2+R_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

$0\neq 8$ olamaz.   Det(A)=0 ÇÖZÜM YOKTUR.

2) A*x=K sistemi

$$\left[A|K\right]=\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\3&2&1&4&7\\0&2&4&1&1\\1&1&1&1&H\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{c}R_1\\R_2\\R_3\\R_4\end{array}\qquad\begin{array}{c}R_1\\-3R_1+R_2\\R_3\\-R_1+R_4\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&-4&-8&1&-2\\0&2&4&1&1\\0&-1&-2&0&H-3\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}R_1\\R_2/-2\\R_3\\2R_4\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&2&4&-1/2&1\\0&2&4&1&1\\0&-2&-4&0&2(H-3)\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}R_1\\R_2\\-R_2+R_3\\R_2+R_4\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&2&4&-1/2&1\\0&0&0&3/2&0\\0&0&0&-1/2&2H-5\end{array}\right]$$

$(3/2)x_4=0\rightarrow x_4=0$

$-1/2\ x_4=2H-5$ $\qquad 2H-5=0$ $\qquad H=5/2.$

H=5/2 yerine konursa

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&2&4&-1/2&1\\0&0&0&3/2&0\\0&0&0&-1/2&0\end{array}\right]\qquad\begin{array}{c}R_1\\R_2\\2/3R_3\\2R_4\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&2&4&-1/2&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-1&0\end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}R_1\\R_2\\R_3\\R_3-R_4\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&3&1&3\\0&2&4&-1/2&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

n=4 rang(r)=3 n-r=1 keyfi parametre seçilebilir

<u>$x_4=0$</u> $\qquad$ <u>$x_3=c$</u> seçelim

$x_1+2x_2+3x_3+x_4=3$

$2x_2+4x_3-1/2x_4=1$ $\qquad 2x_2=1-4c$ $\qquad$ <u>$x_2=(1-4c)/2=1/2-2c$</u>

$x_1+2((1-4c)/2)+3c=3$ $\qquad x_1+1-c=3$ $\qquad$ <u>$x_1=c+2$</u>

$$x_{genel}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+2\\ \frac{1}{2}-2c\\ c\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$$ **olur.**

$$\mathbf{x_{genel}= x_{özel} + x_{homojen}}$$

homojen çözüm için:(A*x=0 sistemi)

$\underline{x_4=0}$ $\underline{x_3=c}$ seçelim

$x_1+2x_2+3x_3+x_4=0$

$2x_2+4x_3-1/2x_4=0$ $2x_2=-4c$ $\underline{x_2=-2c}$ $x_{homojen}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\-2c\\c\\0\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$x_1+-4c+3c=0$ $x_1-c=$ $\underline{x_1=c}$

3) A*x=0 homogen

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2&-6&7&8&0\\4&-13&5&-1&0\end{array}\right]$$

denklem sistemini çözünüz.
çözüm:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}2&-6&7&8&0\\4&-13&5&-1&0\end{array}\right]\begin{array}{l}R_1\\R_2\end{array} \qquad \begin{array}{r}R_1\\-2R_1+R_2\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c}2&-6&7&8&0\\0&-1&-9&-17&0\end{array}\right]$$

n=4 rang(r)=2 n-r=2 keyfi parametre seçilebilir

$\underline{x_4=c_2}$ $\underline{x_3=c_1}$ seçelim

$2x_1-6x_2+7x_3+8x_4=0$
$-x_2-9x_3-17x_4=0$

$x_2=-(9c_1+17c_2)$
$x_1=-(61/2c_1+55c_2)$ olur.

$$\mathbf{x}_{\mathbf{genel}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{61}{2}c_1 - 55c_2 \\ -9c_1 - 17c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Bir Matrisin Özdeğerleri ve Özvektörleri

$det(A-\lambda I)=0$ ile karakteristik denklemin kökleri (özdeğerler) hesaplanır ve herbir kök için bulunan sıfırdan farklı çözümlere ise özvektörler denir

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulunuz.

Özdeğerler

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -1$$ ***(farklı 2 reel kök)***

$\lambda_1=3$ özdeğeri için

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_{11} = -x_{21}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2=-1$ için özdeğeri

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_{12} = x_{22}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Örnek:

$A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ ***matrisinin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşı gelen özvektörleri bulunuz.***

Özdeğerler

$\begin{bmatrix}4-\lambda & 2\\ 3 & 3-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-7\lambda+6=0 \quad \lambda_1=1 \qquad \lambda_2=6$ ***(farklı 2 reel kök)***

$\lambda_1=1$ özdeğeri için

$\begin{bmatrix}4-1 & 2\\ 3 & 3-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\qquad 3x_{11}=-2x_{21} \qquad x_{11}=c$ ***ise*** $x_{21}=-\frac{3}{2}c$ ***olur***

$$\vec{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\ -\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$ c keyfi sabit olduğundan c=2 seçilirse

$$\vec{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -3\end{bmatrix}$$

$\lambda_2=6$ özdeğeri için

$\begin{bmatrix}4-6 & 2\\ 3 & 3-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $\qquad x_{12}=x_{22} \qquad x_{12}=c$ ***ise*** $x_{22}=c$

$$\vec{x}_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

7.4. Lineer ve Sabit Katsayılı Diferansiyel Denklem Sisteminin Matrisler Yardımı İle Çözümü

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n + f_2(t)$$

.

.

$$. \qquad \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}x2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{nn}x_n + f_n(t)$$

şeklindeki bir sistem, sabit katsayılı lineer ve homojen olmayan bir sistemdir. Bu sistemde

$$f_1(t) = f_2(t) = \dots\dots\dots\dots = f_n(t) = 0 \text{ ise}$$

ise sistem ***'homojen sistem'*** adını alır.

Homojen olmayan lineer sistemin genel çözümünü bulmak için, önce homojen sistem çözülür sonra da homojen olmayan sistemin bir özel çözümü aranır ve bunlar toplanır. Bu sistem matrisler yardımıyla

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ . \\ . \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

Sistemin kapalı formu

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax+f(t)}$$

olur. Sistem Homojen ise, yukarıdaki ifade

$$\frac{dx}{dt} - \mathrm{Ax} = 0$$

şeklini alır.

Homojen Sistemin Çözümü İçin

det(A-λI)=0 ile karakteristik denklemin kökleri (özdeğerler) hesaplanır ve herbir kök için bulunan sıfırdan farklı çözümlere ise özvektörler denir özvektörler bulunarak homojen çözüm elde edilir.

Ödev:

$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ matrise karşı gelen özdeğer ve özvektörleri bulunuz.

Hermitian Sistemler

Matrislerin önemli bir alt sınıfı kendine eş veya Hermitian matrislerdir. Bu matrisler $A^*=A$ yani $\overline{a_{ji}}=a_{ij}$ koşulunu sağlarlar.

Hermitian matrislerin bir alt sınıfı da simetrik reel matrislerdir. $A^T=A$ şartı sağlanır. Hermitian matrislerin öz değerleri ve öz vektörleri aşağıdaki koşulları sağlarlar.

1) Tüm öz değerleri reeldir.
2) Öz değerlerin katlılıkları dahil, n özdeğere karşı n tane lineer bağımsız özvektör karşı gelir.
3) Eğer $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$ öz vektörleri farklı öz değerlere karşı gelen öz vektörler ise $(x^{(1)}, x^{(2)})=0$ sağlanır.

Böylece eğer öz değerler basit ise(katlılığı bir olan) onlara karşı gelen öz vektörler ortogonal (dik) vektörler cümlesi oluşturur. (her öz vektör bir diğerine dik)

4) m katlılıktaki bir öz değere karşı gelen öz vektörlerden m tane ortogonal özvektör seçilebilir.

Eğer A matrisi reel ve simetrik bir matris ise özdeğerleri reel ve bu öz değerlere karşı gelen öz vektörleri de reel değerli fonksiyonlardır.

Teorem 7.4.1

***Eğer* $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$ öz vektörleri $x'=A(t)x$ homojen sisteminin çözümleri ise ve keyfi c_1 ve c_2 sabitleri için $c_1 x^{(1)}+c_2 x^{(2)}$ kombinasyonu da bir çözümdür.**

$x'=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}x$ **sisteminin iki çözümü** $x^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t},\ x^{(2)}(t)=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}$ **dir**

teorem 7.4.1 den $\quad x= c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t}+c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t}=c_1 x^{(1)}+c_2 x^{(2)}$

n. mertebeden $x'=A(t)x$ homojen sistemin n tane çözümü $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ olsun ve X(t) matrisinin sütunları(kolonları), $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(n)}(t)$ vektörleri olsun.

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_{11}(t)&x_{12}(t)&.&x_{1n}(t)\\x_{21}(t)&.&.&x_{2n}(t)\\.&.&.&.\\x_{n1}(t)&.&.&x_{nn}(t)\end{pmatrix}$$ **olsun.**

Bu X(t) determinantına $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ çözümlerinin Wronskioni denir. ve $W[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}] = \det(X)$ ile gösterilir.

$x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ çözümlerinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul $W[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}] \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 7.4.2.

Eğer $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ vektör fonksiyonları $x'=A(t)x$ homojen sistemin $\alpha<t<\beta$ ya ait her noktada lineer bağımsız çözümleri ise, bu takdirde homojen sistemin her $x=\phi(t)$ çözümü $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ lerin lineer kombinasyonu olarak

$$\phi(t)= c_1 x^{(1)}(t)+c_2 x^{(2)}(t)+................+c_n x^{(n)}(t)$$

tek türlü belirlenir.

Teorem 7.4.3.

Eğer $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ $\alpha<t<\beta$ aralığı üzerinde $x'=A(t)x$ homojen denkleminin çözümleri iseler bu takdirde bu aralıkta $W[x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}]$ ya özdeş olarak sıfırdır ya da hiçbir yerde sıfır değildir.

Not:
$x'=A(t)x$ homojen denkleminin keyfi bir $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ çözümlerinin cümlesi $\alpha<t<\beta$ aralığının her noktasında lineer bağımsız ise bu aralıkta $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ çözümlerinin cümlesine *temel cümle* denir.

Teorem 7.4.4.

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad , e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \quad ,........ \quad e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

olsun Ayrıca **$x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ ler t_0 noktası $\alpha<t<\beta$ aralığına ait keyfi bir nokta olmak üzere $x^{(1)}(t_0)=e^{(1)}$,..............,$c_n x^{(n)}(t_0)=e^{(n)}$ başlangıç koşullarını sağlayan $x'=A(t)x$ homojen sisteminin çözümleri olsun. Buradan $x^{(1)}$, $x^{(2)}$,...., $x^{(n)}$ ler $x'=A(t)x$ homojen sisteminin çözümlerinin temel cümlesini oluşturur.**

$\det(A-\lambda I)=0$ ile karakteristik denklemin kökleri (özdeğerler) hesaplanır ve herbir kök için bulunan sıfırdan farklı çözümlere ise özvektörler denir özvektörler bulunarak homojen çözüm elde edilir.

FARKLI İKİ REEL KÖK VAR İSE (r1,r2=λ_1,λ_2)

$$y_{genel} = c_1 \vec{y_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{y_2} e^{\lambda_2 t}$$

KATLI KÖK VAR İSE (r1=r2=r=λ)

$$y_{genel}= c_1 \vec{y_1}\, e^{\lambda t}+c_2(\vec{y_1}\, t+\vec{y_2}\,)e^{\lambda t}$$

KÖKLER KOMPLEKS İSE (r1=(α+iβ), r2=(α-iβ))

$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t)$
$e^{(\alpha-i\beta)t}=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)$

$$y_{genel}=c_1 \vec{y_1}\, e^{(\alpha-i\beta)t}+c_2 \vec{y_2}\, e^{(\alpha+i\beta)t}$$

7.5. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} y$$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

y'=Ay det(A-λI)=0 oluşturularak özdeğerler:

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix}=(1-\lambda)[-(2-\lambda)(1+\lambda]+[-(1+\lambda)+2]=(1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0$$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$ (3 farklı reel kök)

$\lambda_1=1$ için özvektörler

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} y_{21}&=0 \\ y_{11}+y_{21}+y_{31}&=0 \\ -2y_{11}+y_{21}-2y_{31}&=0 \end{aligned} \qquad y_{31}=-y_{11}$$

$$\underset{\sim}{y_1}=y^{(1)}=\vec{y_1}=\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

λ_2=2 için özvektörler

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} y_{12}+y_{22}&=0 \qquad & y_{22}&=-y_{12} \\ y_{12}+y_{32}&=0 \qquad & y_{32}&=-y_{12} \\ -2y_{12}+y_{22}-3y_{32}&=0 \end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{y_2}=y^{(2)}=\vec{y}_2=\begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

λ_2=-1 için özvektörler

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2y_{13}-y_{23}&=0 \qquad & y_{23}&=2y_{13} \\ y_{13}+3y_{23}+y_{33}&=0 \\ -2y_{13}+y_{23}&=0 \qquad & y_{33}&=-7y_{13} \end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{y_3}=y^{(3)}=\vec{y}_3=\begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Farklı reel kök olması durumunda

$$\mathbf{y_{genel}}=\mathbf{c_1}\,\vec{y}_1\,\mathbf{e}^{\lambda_1 t}+\mathbf{c_2}\,\vec{y}_2\,\mathbf{e}^{\lambda_2 t}+\mathbf{c_3}\,\vec{y}_3\,\mathbf{e}^{\lambda_3 t}$$

idi.

$$y_{genel}=c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}e^{x}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}e^{2x}+c_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}e^{-x}$$

$$y'=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix}y$$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

y'=Ay det(A-λI)=0 oluşturularak özdeğerler:

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ -8 & -5 & -3-\lambda \end{bmatrix}=(1-\lambda)[(1-\lambda)(-3-\lambda)-5]-[2(-3-\lambda)-8]+[-10+8(1-\lambda)]=-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4=0$$

$\lambda_1=-2$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=2$ (3 farklı reel kök)

$\lambda_1=-2$ için

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & -5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7/3 & -5/3 \\ 0 & -7/3 & 5/3 \end{bmatrix}\begin{matrix} R_1 \\ -2/3R_1+R_2 \\ 8/3R_1+R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_2+R_3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3y_{11}+y_{21}+y_{31}=0 \\ \\ 7/3y_{21}-5/3y_{31}=0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} y_{21}=\dfrac{5}{7}y_{31} \\ y_{11}=\dfrac{-4}{7}y_{31} \end{matrix}$$

$y_{31}=7$ seçersek

$$\underset{\sim}{y_1}=\vec{y_1}=\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2=-1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2y_{12}+y_{22}+y_{32}=0$
$y_{22}-2y_{32}=0$ $y_{22}=2y_{32}$ $2y_{12}=-3y_{32}$ $y_{12}=-3/2\, y_{32}$

$y_{32}=2$ seçersek

$$\underset{\sim}{y_2}=\vec{y_2}=\begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2=2$ için

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -8 & -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-y_{13}+y_{23}+y_{33}=0$
$y_{23}+y_{33}=0$ ***$y_{23}=-y_{33}$*** ***$y_{13}=0$***

$y_{33}=1$ *seçersek*

$$\underset{\sim}{y_3} = \vec{y}_3 = \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Farklı reel kök olması durumunda

$$\mathbf{y_{genel}= c_1}\, \vec{y}_1\, \mathbf{e}^{\lambda_1 t} + \mathbf{c_2}\, \vec{y}_2\, \mathbf{e}^{\lambda_2 t} + \mathbf{c_3}\, \vec{y}_3\, \mathbf{e}^{\lambda_3 t}$$

idi.

$$y_{genel}=c_1 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} e^{-2x} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-x} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2x}$$

Hermitian Olmayan Sistemler

Eğer Amatrisi hermitian değilse,

$$x'=Ax$$

sisteminin çözümlerini bulmak daha karmaşıktır. A nın reel matris olduğu kabul edilirse, Amatrisinin özdeğerleri için üç durum oluşur.

1) Anın tüm öz değerleri reel ve farklıdır. Sistemin genel çözümü

$$\mathbf{x_{genel}= c_1}\, \vec{y}_1\, \mathbf{e}^{\lambda_1 t} + \mathbf{c_2}\, \vec{y}_2\, \mathbf{e}^{\lambda_2 t} + \ldots\ldots\ldots\ldots + .\mathbf{c_n}\, \vec{y}_n\, \mathbf{e}^{\lambda_n t}$$

dir.

2) Anın bazı özdeğerleri kompleks eşlenikleri ile bulunur.

3) Anın bazı özdeğerleri katlı bulunur.

7.6. Kompleks Özdeğerler

$x'=Ax$

sistemi ele alınsın. A matrisi reel değerli olsun .Bu durumda $det(A-\lambda I)=0$ karakteristik denklemin katsayıları reel olacağından, karakteristik denkleminin kökleri olan özdeğerlerin bir kısmı kompleks eşlenikleri ile bulunabilir Örnek olarak A nın özdeğerleri(Kökler)kompleks ise ($\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$) bunlara karşı gelen özvektörlerde kompleks eşleniklidir.

($\vec{x}_1$ =a+ib, $\vec{x}_2$ =a-ib) $\qquad$ ***a, b reel***

Dolayısıyla ele alınan diferansiyel denklemin genel çözümü

$x^{(1)}(t)= \mathbf{c_1}\, \vec{x}_1\, e^{\lambda_1 t}$ $\qquad$ $x^{(2)}(t)=)= \mathbf{c_1}\, \vec{x}_2\, e^{\lambda_2 t}$

$\vec{x}_1$ ***=(a+ib) ve*** **$\lambda_1=\alpha+i\beta$ olduğu dikkate alınarak** ***$x^{(1)}(t)$ reel ve sanal kısımlara ayrılırsa***

$x^{(1)}(t)$**=$e^{\alpha t}(a\cos\beta t - b\sin\beta t) + ie^{\alpha t}(a\sin\beta t + b\cos\beta t)$ **olur.

Kısaca yukarıdaki eşitlikte reel kısmına u(t) ve sanal kısma v(t) denirse (u(t) ve v(t) reel değerli fonksiyonlar)

$$x^{(1)}(t)= u(t)+i\, v(t)$$

şeklinde elde edilir. Örnek olarak A nın iki özdeğeri **($\lambda_1=\alpha+i\beta$, $\lambda_2=\alpha-i\beta$)** ***ve diğer tüm özdeğerleri reel ve farklı ise, genel çözüm***

$$y_{genel}= c_1\, u(t)+c_2 v(t)+ c_3y_1e^{\lambda 1t}+ c_4y_2e^{\lambda 2t}+\ldots + c_ny_ne^{\lambda nt}$$

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\vec{x}$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

x'=Ax det(A-λI)=0 oluşturularak özdeğerler: $x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{bmatrix}=\lambda^2+\lambda+5/4=0$

$\lambda_1=-1/2+i$, $\lambda_2=-1/2-i$ kompleks kök

$\lambda_1=-1/2+i$ için özvektörler

$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ***$-ix_{11}=-x_{21}$*** ***$x_{11}=1$ ile*** $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$\lambda_1=-1/2-i$ için öz vektörler

$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ***$ix_{12}+x_{22}=0$*** ***$ix_{12}=-x_{22}$*** $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Not: Kompleks kök durumunda bir kök için çözüm yapmak yeterlidir, ,ikinci kökün çözümü için sadece ilk kompleks kök için bulunan çözümdeki sanal kısımlar işaret değiştirir.

Genel çözüm:

$$x_{genel}=c_1 \vec{x_1}\ e^{(\alpha-i\beta)t} + c_1 \vec{x_2}\ e^{(\alpha+i\beta)t}$$

şeklindedir.

$$x_{genel}= c_1\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}e^{(-1/2+i)t}+ c_2\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix}e^{(-1/2-i)t}$$

$$e^{(-1/2+i)t}=e^{-t/2}(\cos t+i\sin t)$$
$$e^{(-1/2-i)t}= e^{-t/2}(\cos t-i\sin t)$$

$$x_{genel}= c_1\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} e^{-t/2}(\cos t+i\sin t)+ c_2\begin{bmatrix}1\\ -i\end{bmatrix} e^{-t/2}(\cos t-i\sin t)$$

$$x_{genel}= c_1\, e^{-t/2}(\cos t+i\sin t)+ c_2\, e^{-t/2}(\cos t-i\sin t)+ ic_1\, e^{-t/2}(\cos t+i\sin t)-i\, c_2\, e^{-t/2}(\cos t-i\sin t)$$

$$= e^{-t/2}[(c_1+c_2)\cos t+i(c_1-c_2)\sin t]+ e^{-t/2}[i(c_1-c_2)\cos t-(c_1+c_2)\sin t]$$

$(c_1+c_2)=C_1$
$i(c_1-c_2)=C_2$ DERSEK

$$x_{genel}= e^{-t/2}[C_1\cos t+C_2\sin t]+ e^{-t/2}[C_2\cos t-C_1\sin t] =c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^{-t/2}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}e^{-t/2}$$

VEYA

$$e^{(-1/2+i)t}=e^{-t/2}(\cos t+i\sin t)$$

$$x^{(1)}(t)=\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix} e^{-t/2}(\cos t+i\sin t)$$

$x^{(1)}(t)$ reel ve sanal kısımlara ayrılırsa

$$=\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^{-t/2}+i\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}e^{-t/2}=u(t)+iv(t)$$

u(t) ve v(t) bulunduğundan $x^{(1)}(t)$ eşleniğini bulmadan da genel çözüm bulunur. Buradan ele alınan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$\mathbf{y_{genel}= c_1\ u(t)+c_2 v(t)=}\ c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}e^{-t/2}+c_2\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}e^{-t/2}$$

$$y' = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}y$$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

y'=Ay **det(A-λI)=0 oluşturularak özdeğerler**:

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & 1-\lambda & -2\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)[(1-\lambda)(1-\lambda)+4]=(1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+5)=0$$

$$\boldsymbol{\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=1-2i\ ,\ \lambda_3=1+2i}$$

$\lambda_1=1$ için

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -2\\ 3 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\ y_{21}\\ y_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\quad \begin{matrix}2y_{11}-2y_{31}=0\\ 3y_{11}+2y_{21}=0\end{matrix}\qquad y_{11}=y_{31}\qquad y_{21}=-3/2\,y_{31}$$

$$\underset{\sim}{y_1}=\vec{y_1}=\begin{bmatrix}y_{11}\\ y_{21}\\ y_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$$

λ_2=1-2i için özvektörler

$$\begin{bmatrix} 2i & 0 & 0 \\ 2 & 2i & -2 \\ 3 & 2 & 2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2iy_{12} &= 0 \\ 2y_{12}+2iy_{22}-2y_{32} &= 0 \\ 3y_{12}+2y_{22}+2iy_{32} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_{12} &= 0 \\ y_{22} &= -iy_{32} \end{aligned}$$

y_{32}=1 ise

$$\underset{\sim}{y_2} = \vec{y_2} = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

λ_3=1+ 2i için özvektörler

$$\begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} -2yi_{13} &= 0 \\ 2y_{13}-2iy_{23}-2y_{33} &= 0 \\ 3y_{13}+2y_{23}-2iy_{33} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_{13} &= 0 \\ \\ y_{23} &= iy_{33} \end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{y_3} = \vec{y_3} = \begin{bmatrix} y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Not: Kompleks kök durumunda bir kök için çözüm yapmak yeterlidir, ,ikinci kökün çözümü için sadece ilk kompleks kök için bulunan çözümdeki sanal kısımlar işaret değiştirir.

Genel çözüm:

$$\mathbf{y_{genel}} = \mathbf{c_1}\,\vec{y_1}\,\mathbf{e}^{\lambda_1 t} + \mathbf{c_2}\,\vec{y_2}\;\mathbf{e}^{(\alpha-i\beta)t} + \mathbf{c_3}\,\vec{y_3}\;\mathbf{e}^{(\alpha+i\beta)t}$$

şeklindedir.

$$\mathbf{y_{genel}} = \mathbf{c_1}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}\mathbf{e^t} + \overline{c_2}\begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{e^{(1-2i)t}} + \overline{c_3}\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{e^{(1+2i)t}}$$

$$\mathbf{e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)}$$
$$\mathbf{e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)}$$

idi

(1+2i 1-2i için)

$$\mathbf{e^{(1-2i)t} = e^t(\cos 2t - i\sin 2t)}$$
$$\mathbf{e^{(1+2i)t} = e^t(\cos 2t + i\sin 2t)}$$

$$\overline{c_2}\,\mathbf{(-i)\,e^{(1-2i)t}} + \overline{c_3}\,\mathbf{(i)\,e^{(1+2i)t} = ie^t(-}\overline{c_2}\,\mathbf{e^{-2t}} + \overline{c_3}\,\mathbf{e^{2t})} \qquad \mathbf{(i^2=-1)}$$

$=e^t(-\overline{c_3}\,(i\cos 2t-\sin 2t)-\overline{c_2}\,(i\cos 2t+\sin 2t))$

$=e^t[i(\overline{c_3}-\overline{c_2})\cos 2t-(\overline{c_2}+\overline{c_3})\sin 2t$

$i(\overline{c_3}-\overline{c_2})=c_2,\qquad -(\overline{c_2}+\overline{c_3})=c_3$ **ile gösterirsek**

$$=e^t(c_2\cos 2t+c_3\sin 2t)$$

$\overline{c_2}\,e^{(1-2i)t}+\overline{c_3}\,e^{(1+2i)t}=\overline{c_2}\,e^t(\cos 2t-i\sin 2t)+\overline{c_3}\,e^t(\cos 2t+i\sin 2t)$

$=e^t[(\overline{c_2}+\overline{c_3})\cos 2t+i(\overline{c_3}-\overline{c_2})\sin 2t)$

$(\overline{c_3}-\overline{c_2})=c_2,\qquad -(\overline{c_2}+\overline{c_3})=c_3$ **ile gösterdiğimizden**

$$=e^t[-c_3\cos 2t+c_2\sin 2t)]$$

$$y_{genel}=c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}e^t+\overline{c_2}\begin{bmatrix}0\\-i\\1\end{bmatrix}e^{(1-2i)t}+\overline{c_3}\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}e^{(1+2i)t}$$

$$y_{genel}=c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}e^t+c_2\begin{bmatrix}0\\\cos 2t\\\sin 2t\end{bmatrix}e^t+c_3\begin{bmatrix}0\\\sin 2t\\-\cos 2t\end{bmatrix}e^t$$

VEYA

$\lambda_2=1+2i$ için özvektörler

$$\begin{bmatrix}-2i&0&0\\2&-2i&-2\\3&2&-2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{13}\\y_{23}\\y_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}-2yi_{13}&=0 && y_{13}=0\\2y_{13}-2iy_{23}-2y_{33}&=0\\3y_{13}+2y_{23}-2iy_{33}&=0 && y_{23}=iy_{33}\end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{y_2}=\vec{y_2}=\begin{bmatrix}y_{13}\\y_{23}\\y_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix}$$

olsa

$$\begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix} e^{(1+2i)t} \quad \textbf{veya} \quad \begin{bmatrix}0\\1\\-i\end{bmatrix} e^{t}(\cos 2t + i\sin 2t)$$ **ile reel ve sanal kısımlara ayrılırsa**

$$x^{(2)}(t)=\begin{bmatrix}0\\\cos 2t\\\sin 2t\end{bmatrix} e^{t}+i\begin{bmatrix}0\\\sin 2t\\-\cos 2t\end{bmatrix} e^{t}=u(t)+iv(t)$$

(u(t),v(t) bulunduğundan $x^{(2)}(t)$ nin eşleniği bulunmadan da genel çözüm bulunur) genel çözüm: c_1 , c_2 , c_3 keyfi sabitler olmak üzere

$y_{genel}= c_1 y_1 e^{\lambda 1 t} + c_2\ u(t)+c_3 v(t)$

$$y_{genel}= c_1\begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix} e^{t} + c_2\begin{bmatrix}0\\\cos 2t\\\sin 2t\end{bmatrix} e^{t}+c_3\begin{bmatrix}0\\\sin 2t\\-\cos 2t\end{bmatrix} e^{t}$$

7.7. KATLI KÖK DURUMU

r=λ özdeğeri , Amatrisinin katlılığı iki olan bir özdeğeri olsun ve bu özdeğere karşı gelen birtane $\vec{x_1}$ ***özvektörü olsun Bu durumda sistemin çözümü***

$$x^{(1)}(t)= \vec{x_1}\, e^{\lambda t} \qquad (1)$$

şeklindedir. Ve $\vec{x_1}$ ***vektörü***

$$(A-\lambda I)\, \vec{x_1} =0 \qquad (2)$$

denklemini sağlar . Sistemin ikinci çözümü

$$x^{(2)}(t)= \vec{x_1}\, te^{\lambda t}+ \vec{x_2}\, e^{\lambda t} \qquad (3)$$

şeklinde aranır. (3) denklemindeki $\vec{x_1}$ ***(2) denklemini sağlar,*** $\vec{x_2}$ ***ise***

$$(A-\lambda I)\, \vec{x_2} =\vec{x_1} \qquad (4)$$

den bulunur. kısaca 2 katlı kök durumunda bulunan ilk çözüm, eşitliğin sağ tarafına yazılarak ikinci kök değeri için çözüm elde edilir. Genel çözüm

$$x_{genel}= c_1\, x^{(1)}(t) + c_2\, x^{(2)}(t)= c_1\, \vec{x_1}\, e^{\lambda t}+c_2(\vec{x_1}\, t+\vec{x_2})e^{\lambda t}$$

dir.

r=λ özdeğerinin katlılığının üç olması durumu

I. durum

r=λ üç katlı özdeğerine $\vec{x}_1$ **,** $\vec{x}_2$ ***ve*** $\vec{x}_2$ ***lineer bağımsız özvektörleri karşı gelsin . Bu durumda lineer bağımsız çözümler***

$$x^{(1)}(t) = \vec{x}_1\, e^{\lambda t}$$

$$x^{(2)}(t) = \vec{x}_2\, e^{\lambda t}$$

$$x^{(3)}(t) = \vec{x}_3\, e^{\lambda t}$$

şeklindedir.

II.durum

r=λ üç katlı özdeğerine karşı bir tane lineer bağımsız özvektörün karşı geldiği varsayılsın. Bu durumda ilk çözüm

$$x^{(1)}(t) = \vec{x}_1\, e^{\lambda t} \qquad (5)$$

ile, ikinci çözüm

$$x^{(2)}(t) = \vec{x}_1\, t e^{\lambda t} + \vec{x}_2\, e^{\lambda t} \qquad (6)$$

ile ve üçüncü çözüm ise

$$x^{(3)}(t) = \vec{x}_1\, \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} + \vec{x}_2\, t\, e^{\lambda t} + \vec{x}_3\, e^{\lambda t} \qquad (7)$$

ile bulunur. (7) denklemindeki $\vec{x}_1$ ***(2) denklemini,*** $\vec{x}_2$ ***(4) denklemini sağlar ve*** $\vec{x}_3$ ***ise***

$$(A - \lambda I)\, \vec{x}_3 = \vec{x}_2 \qquad (8)$$

denkleminden belirlenir. (8) denkleminin çözümü $\vec{x}_3$ ***e göre bulunabilir.*** $\vec{x}_3$ *ve* $\vec{x}_2$ ***vektörlerine 'genelleştirilmiş özvektörler' denir.***

III.durum

r=λ üç katlı özdeğerine karşı iki tane lineer bağımsız $\vec{x}_1$ ***ve*** $\vec{x}_2$ **özvektörleri karşı geliyorsa, ele alınan denklem sisteminin iki çözümü**

$$x^{(1)}(t) = \vec{x}_1\, e^{\lambda t}$$

$$x^{(2)}(t) = \vec{x}_2\, e^{\lambda t}$$

şeklindedir. Üçüncü çözüm ise

$$x^{(3)}(t) = \xi\, t e^{\lambda t} + \vec{x}_3\, e^{\lambda t}$$

Burada $\xi = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t)$ ***seçilirse***

$$(A-\lambda I)\ \vec{x}_3 = \xi \qquad (9)$$

denklemi çözülebilir. c_1 **ve** c_2 ***öyle seçilebilir ki (9) denkleminden*** $\vec{x}_3$ ***çözülebilir. Buradan*** $x^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ ***ve*** $x^{(3)}(t)$ ***çözümleri r=λ özdeğerine karşı gelen lineer bağımsız çözümler olurlar.***

Örnek:

$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x}$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

x'=Ax det(A-λI)=0 oluşturularak özdeğerler:

$\begin{bmatrix} (1-\lambda) & -1 \\ 1 & (3-\lambda) \end{bmatrix}$=(1-λ)(3-λ)+1=$\lambda^2$-4λ+4=$(\lambda-2)^2$=0

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=2$ 2 katlı kök

$\lambda_1=2$ için

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x_{11}=-x_{21}}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2 katlı kök durumunda bulunan çözüm $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ***eşitliğin sağ tarafına yazılarak ikinci kök değeri için çözüm elde edilir***

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \boldsymbol{-x_{12}-x_{22}=1}$$

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Genel Çözüm 2 katlı kök olması durumunda ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

$$\mathbf{x_{genel}= c_1}\, \vec{x}_1\, \mathbf{e^{\lambda t}+c_2(}\,\vec{x}_1\,\mathbf{x+}\,\vec{x}_2\,\mathbf{)e^{\lambda t}}$$

idi.

$$\mathbf{x_{genel}= c_1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\mathbf{e^{2t}+c_2(}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\mathbf{x+}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\mathbf{)e^{2t}}$$

7.9. HOMOJEN OLMAYAN LİNEER SİSTEMLER

Köşegenleştirme(Diyagonalleştirme) Metodu

$$\frac{dx}{dt}=\mathbf{Ax+f(t)} \qquad \mathbf{1}$$

formundaki sistemin çözümü aranır. Bu işlem için

- A matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler bulunur
- Kolonları bu özvektörlerden oluşan T matrisi oluşturulur, bu T dönüşüm matrisi ile

$$T=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & . & . & . & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & . & . & . & x_{2n} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & . & . & x_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & . & . & . & x_{nn} \end{pmatrix} = T = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & .. & \vec{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x=Ty} \qquad \mathbf{2}$$

olacak şekilde yeni bir y bağımlı değişkeni tanımlanır. Bu ifade $x'=Ax+f(t)$ de yerine konursa

$$Ty'=ATy+f(t)$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı T^{-1} çarpılarak

$$\mathbf{y'=(T^{-1}AT)y+ T^{-1}f(t)=Dy+h(t)} \qquad \mathbf{3}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu eşitliktediki D matrisi Anın özdeğerlerini köşegeninde bulunduran bir matristir.

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(3) sistemi n tane $y_1(t)$,............$y_n(t)$ denklemlerinin bir sistemidir. Kısaca (3) sistemi skaler formda

$$y_k^{'} = \lambda_k y_k(t) + h_k(t) \qquad k=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots n \qquad \mathbf{4}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki $h_k(t)$ ler $f_1(t)$,............$f_n(t)$ lerin belli bir lineer kombinasyonu şeklindedir.4 denklemleri k=1,2,3,...................n için birer birinci mertebeden liner denklem olduklarından, birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin aranması tekniği ile çözümleri bulunur. c_k lar sabit olmak üzere

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t}\int_{t_o}^{t} e^{-\lambda_k t} h_k(s)ds + c_k e^{\lambda_k t} \qquad k=1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots n \qquad \mathbf{5}$$

elde edilen $y_k(t)$ ler dikate alınarak (5) sistemi T dönüşüm matrisi ile çarpılarak (x=Ty de) (5) in sağ tarafındaki integralli terimden (1) sisteminin özel çözümü, $c_k e^{\lambda_k t}$ den ise x'=Ax homojen denklem sisteminin genel çözümü bulunur.

Örnek:

$\vec{x}^{\,'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{bmatrix}$ diferansiyel denklem sisteminin genel çözümünü köşegenleştirme metodu kullanarak bulunuz.

Çözüm:

x'=Ax det(A-λI)=0 oluşturularak özdeğerler:

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 1 \\ 4 & (-2-\lambda) \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda)-4 = \lambda^2+\lambda-6=0$$

$\lambda_1=-3$, $\lambda_2=2$ 2 farklı reel kök

λ_1=-3

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{4x_{11}=-x_{21}}$$

$$\vec{x}_1=\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -4\end{bmatrix}$$

λ_2=2 için

$$\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 4 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x_{12}=x_{22}} \qquad \vec{x}_2=\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

Özvektörleri içeren matrisi T ile gösterirsek $T=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

x=Ty $\longrightarrow$ x′=Ax+f(t) de yerine konursa

$$Ty'=Aty+f(t)$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı T^{-1} çarpılarak

$$\mathbf{y'=(T^{-1}AT)y+T^{-1}f(t)=Dy+T^{-1}f(t)} \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

T^{-1} in hesabı

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 4 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4/5 & 1/5\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/5 & -1/5\\ 0 & 1 & 4/5 & 1/5\end{array}\right]$$

$$\mathbf{T^{-1}}=\begin{bmatrix}1/5 & -1/5\\ 4/5 & 1/5\end{bmatrix} \qquad \mathbf{y'=Dy+T^{-1}f(t)\ oluşturulursa}$$

$$\mathbf{y'}=\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}1/5 & -1/5\\ 4/5 & 1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-2t}\\ -2e^{t}\end{bmatrix}$$

$$y_1'+3y_1=\frac{1}{5}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{t}$$

$$y_2'-2y_2=\frac{4}{5}e^{-2t}-\frac{2}{5}e^{t} \qquad \textbf{integrasyon çarpanı yardımıyla}$$

$$\left[y_1e^{3t}\right]' = \frac{1}{5}e^{t} + \frac{2}{5}e^{4t} \longrightarrow \quad y_1e^{3t} = \frac{1}{5}e^{t} + \frac{1}{10}e^{4t} + c_1 \qquad y_1 = \frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{t} + c_1\, e^{-3t}$$

$$\left[y_2e^{-2t}\right]' = \frac{4}{5}e^{-4t} - \frac{2}{5}e^{-t} \longrightarrow \quad y_2e^{-2t} = -\frac{1}{5}e^{-4t} + \frac{2}{5}e^{-t} + c_2 \qquad y_2 = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{t} + c_2e^{2t}$$

bulunur. Buradan

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 1/10 \\ 2/5 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} c_1e^{-3t} \\ c_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

Bu sistemin her iki tarafı T dönüşüm matrisi ile çarpılırsa genel çözüm(x=Ty)

$$x=Ty=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/5\, e^{-2t} + 1/10\, e^{t} + c_1e^{-3t} \\ -1/5\, e^{-2t} + 2/5\, e^{t} + c_2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2\, e^{t} + c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \\ -e^{-2t} - 4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

veya

$$x=\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

Parametreleri Değişimi Metodu

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax+f(t)}$$

diferansiyel denklem sisteminde

x'=Ax homojen sistemine karşı gelen ψ temel matrisinin bulunduğu farzedilsin. Homojen sistemin çözümü x_h= ψ(t) c şeklinde olduğundan c yerine u(t) yazılarak

x= ψ(t) u(t)

şeklinde çözüm aranır, u(t), ψ(t) u'(t)=f(t) koşulu sağlayacağından $u'_i(t)$ ler ve bunlardan integral alınarak $u_i(t)$ ler belirlenir. Ve x= ψ(t) u(t) yerlerine konarak genel çözüm elde edilir.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2 + \cos t$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2 - \sin t$$ ***sistemini çözünüz.***

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ ***$=\lambda^2-2\lambda-3=0$ $\quad\lambda_1=3$ $\quad\lambda_2=-1$ (farklı 2 reel kök)***

$\lambda_1=3$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ***$x_{11}=-x_{21}$***

$$\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2=-1$ için

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ ***$x_{12}=x_{22}$***

$$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{homojen} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$x_1= c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$
$x_2=-c_1e^{3t}+c_2e^{-t}$

sabitlerin değişimi metodu kullanılarak

$$\frac{dx_1}{dt} = 3c_1e^{3t} - c_2e^{-t} + c_1'e^{3t} + c_2'e^{-t} \longrightarrow; \frac{dx_2}{dt} = -3c_1e^{3t} - c_2e^{-t} - c_1'e^{3t} + c_2'e^{-t}$$

x_1, x_2 , $\frac{dx_1}{dt} ve \frac{dx_2}{dt}$ ifadeleri verilen sistemde yerlerine konursa

$$3c_1e^{3t} - c_2e^{-t} + c_1'e^{3t} + c_2'e^{-t} = c_1e^{3t}+c_2e^{-t}+2c_1e^{3t}-2c_2e^{-t}+\cos t$$

$$c_1'e^{3t} + c_2'e^{-t} = \cos t \qquad \textbf{(1)}$$

$$-3c_1e^{3t} - c_2e^{-t} - c_1'e^{3t} + c_2'e^{-t} = -2c_1e^{3t}-2c_2e^{-t}-c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-\sin t$$

$$-c_1'e^{3t} + c_2'e^{-t} = -\sin t \qquad \textbf{(2)}$$

(1) ve(2) den c_1 ve c_2 bulunur $x_{homojen}$ de yerlerine konarak x_{genel} elde edilir.

$$2c_2'e^{-t} = \cos t - \sin t \qquad c_2' = \frac{1}{2}e^{t}(\cos t - \sin t)$$

$$c_1'e^{3t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) = \cos t \qquad c_1' = \frac{1}{2}e^{-3t}(\cos t + \sin t)$$

$c_2=1/2\ e^t \cos t+K_1$

$c_1=-1/10\ e^{-3t}(2\cos t+\sin t)+K_2$

Homojen çözümden

$x_1= u_1e^{3t}+u_2e^{-t}$

$x_2=-u_1e^{3t}+u_2e^{-t}$ yazılarak **ψ(t) u'(t)=f(t) oluşturulursa** $\Psi = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ -e^{3t} & e^{-t} \end{pmatrix}$

$$u_1'e^{3t} + u_2'e^{-t} = \cos t$$
$$-u_1'e^{3t} + u_2'e^{-t} = -\sin t \qquad \textbf{ile}$$

$$2u_2'e^{-t} = \cos t - \sin t \qquad u_2' = \frac{1}{2}e^{t}(\cos t - \sin t)$$

$$u_1'e^{3t} + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t) = \cos t \qquad u_1' = \frac{1}{2}e^{-3t}(\cos t + \sin t)$$

$u_2=1/2\ e^t \cos t+K_1$

$u_1=-1/10\ e^{-3t}(2\cos t+\sin t)+K_2$ elde edilir. u_1 ve u_2 nin karşılıkları

$x_1= u_1e^{3t}+u_2e^{-t}$
$x_2=-u_1e^{3t}+u_2e^{-t}$ yerlerine yazılarak genel çözüm bulunur.

$x_1=-1/10(2\cos t+\sin t)e^{3t}+K_2e^{3t}+1/2\cos t+K_1e^{-t}$
$x_2=-1/10(2\cos t+\sin t)e^{3t}+K_2e^{3t}+1/2\cos t+K_1e^{-t}$