

Adı: Soyadı: No:	T.C Sakarya Üniversitesi 2011-2012 Öğretim Yılı Güz Dönemi Mühendislik Fakültesi Matematik I (B Grubu) Dersi Final Sınav Sorularıdır 06.01.2012	PUAN
------------------------	--	------

NOT: Nerden geldiği belli olmayan, okunamayan ve anlaşılamayan yerler puanlanmaz.
Sorular eşit puanlıdır. Sınav Süresi 85 dk dır.

1. $f(x) = \ln x \cdot \cos x$ fonksiyonunun n . mertebeden türevini bulunuz. 2. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ fonksiyonunun (1,1) noktasına en yakın noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz. 3. Türevin tanımını kullanarak $\cos x$ fonksiyonunun türevinin $-\sin x$ olduğunu gösteriniz.	4. $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini gerekli incelemeleri yaptıktan sonra çiziniz. 5. $\cos \frac{11\pi}{36}$ sayısının yaklaşık değerini diferensiyel yardımı ile hesaplayınız.
--	--

Başarılar dilerim

Dr. Murat GÜZELTEPE

Çözümler ve puanlama

1. $u = \cos x$ ve $v = \ln x$ olsun. Bu durumda

$$v = \ln x \quad u = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$v' = x^{-1} \quad u' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$v'' = -x^{-2} \quad u'' = \cos\left(2\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$v''' = 2x^{-3} \quad \vdots$$

$$v^{(4)} = -2 \cdot 3x^{-4} \quad u^{(n-k)} = \sin\left((n-k+1)\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$\vdots$

6 puan

$$v^{(k)} = (-1)^{k-1} (k-1)! x^{-k}, \quad k \geq 1$$

6 puan

olacağından $f^{(n)}(x) = (\ln x \cdot \cos x)^{(n)} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k-1} (k-1)! x^{-k} \sin\left((n-k+1)\frac{\pi}{2} + x\right)$ olur. 8

puan

2. Bu nokta (a, b) noktası olsun. (a, b) noktası $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ fonksiyonu üzerinde

olduğundan $b = \frac{a+2}{a-1}$ olur. $\left(a, \frac{a+2}{a-1}\right)$ noktası ile $(1,1)$ noktası arasındaki uzaklık d ise

$$d = \sqrt{(a-1)^2 + \left(\frac{a+2}{a-1} - 1\right)^2}$$

olur (5 puan). Bu a 'ya bağılı fonksiyonun bir minimum noktası vardır. Bu noktanın apsisi fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan uygun bir değerdir. Bu durumda

$$d' = 0 \Rightarrow 2(a-1) + 2\left(\frac{a+2}{a-1} - 1\right)\left(\frac{-3}{a-1}\right) = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{3} \quad (5 \text{ puan})$$

elde edilir. Buradan $b = \frac{1 \pm \sqrt{3} + 2}{1 \pm \sqrt{3} - 1} = 1 \pm \sqrt{3}$ (5 puan) bulunur . Teğetin eğimi ise

$$m = f'(a) = \frac{-3}{(1 \pm \sqrt{3} - 1)^2} = -1$$

olup teğetin denklemi $y - 1 \pm \sqrt{3} = -(x - 1 \pm \sqrt{3}) \Rightarrow x + y = 2 \pm 2\sqrt{3}$ olarak bulunur. (5 puan)

3.

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad (5 \text{ puan}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} \quad (10 \text{ puan}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) = -\sin x \quad (5 \text{ puan}) \end{aligned}$$

4. 1) $T = \mathbb{R} - \{1\}$ dir.

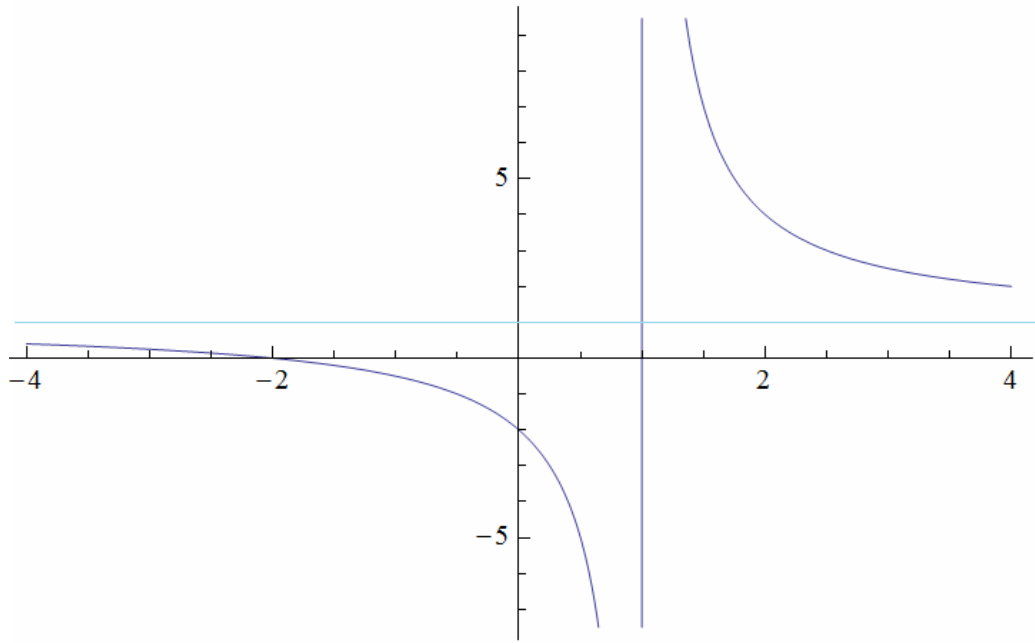
2) Eksenleri (0,-2) ve (-2,0) noktalarında keser.

3) Asimptotlar: Eğri ve eğik asimptot yoktur.

yatay asimptot: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = 1,$

düşey asm: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$ dir. (5 puan)

4) $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$ olduğundan fonksiyon $x = 1$ noktası hariç her yerde azalandır. (5 puan)



(10 puan)

5) $\cos \frac{11\pi}{36} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{36} \right)$ olarak yazılır. Buradan yaklaşık hesap için

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + \Delta x f'(x_0) \quad (5 \text{ puan})$$

formülü kullanılarak

$$\cos \frac{11\pi}{36} \cong \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{-\pi}{36} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{36} \cong 0,5 + 0,0756 = 0,5756 \quad (10 \text{ puan})$$

olarak hesaplanır. Burada $f(x) = \cos x$ $x_0 = \frac{\pi}{3}$ $\Delta x = \frac{-\pi}{36}$ olarak alınmıştır. (5 puan)