

OLASILIK VE RASTLANTI DEĞİŞKENLERİ
DERS NOTLARI

Yrd. Doç. Dr. Bülent Çavuşoğlu

Yrd. Doç. Dr. Emin Argun Oral

Şubat 2009
II. Sürüm

ÖNSÖZ (II.SÜRÜM)

Türkçe kaynakların azlığı biz öğretim üyelerini kendi ders notlarımızı düzgün bir formatta hazırlayarak öğrenciye sunma yönünde motive etmektedir. Ancak ders notlarının bir kitap kadar detaylı ve kapsamlı hale gelmesi için ayrıca özenli bir çalışma gerekmektedir. Bu çalışma ise bir süreci gerektirmektedir. Şu andaki haliyle ikinci sürümden amaçladığımız öğrencinin rahatlıkla takip edebileceği bir yardımcı kaynak oluşturmaktır. Dolayısıyla bu ders notlarının bir ders kitabı yerine geçemeyeceği ve dersin öğretim üyesi tarafından tavsiye edilen yerli ve yabancı kaynaklarla beraber düşünüldüğünde katkısının amaçlandığı yönde olacağı göz önünde bulundurularak bu notlardan faydalanılmalıdır.

Oldukça kısa süre içerisinde hazırlanan bu ilk sürüme ilaveler ve düzeltmelerin yapıldığı bu ikinci sürümde *“Probability, Random Variables and Stochastic Processes by Athanasios Papoulis”*, *“Probability, Random Processes, and Estimation Theory for Engineers by Henry Stark and John W. Woods”*, *“Lecture Notes on Probability Theory and Random Processes by Jean Walrand Department of Electrical Engineering and Computer Sciences University of California Berkeley, CA 94720 August 25, 2004”*, *“İşaret ve Sistem Analizinde Olasılık Yöntemleri” by Prof. George Cooper and Claire McGillem* olmak üzere çeşitli yabancı ve Türkçe kaynaklardan faydalanılmıştır.

Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği 1. sınıf 2. yarıyılında okutulan “Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri” dersi içerisinde bir elektrik-elektronik mühendisi için gerekli olan ve olasılıkta temel teşkil eden konular üzerinde durulmaya dikkat edilmiş ve öğrencinin rahatlıkla takip edebileceği bir yardımcı kaynak oluşturulmaya çalışılmıştır. Bu ders notlarının daha iyi bir kaynak haline gelmesi için, bu dersi alan öğrencilerden ve bu notları inceleme fırsatı bulan öğretim üyelerinden eksik gördükleri yönlerin düzeltilmesine ilişkin katkılarını beklediğimizi özellikle belirtmek istiyoruz.

Bu kaynağın ilk sürümünün bilgisayara aktarılmasında emeği geçen öğrencimiz Ömer Çoban’a ve II. sürümün kalite kontrolünü yaparak eksik yönlerinin düzeltilmesini sağlayan Arş. Gör. M. Alptekin Engin’e teşekkür ederiz.

Şubat 2009

Yrd. Doç. Dr. Bülent Çavuşoğlu
Yrd. Doç. Dr. Emin Argun Oral

DERS İÇERİĞİ

1. Olasılık
 - a. Olasılık nedir?
 - b. Olasılığın klasik, bağıl frekans ve aksiyomatik tanımları
2. Kümeler ve Olaylar
 - a. Küme İşlemleri
 - b. Bileşik olasılık
 - c. Koşullu olasılık
 - d. Baye's teoremi
 - e. Bağımsızlık
3. Tekrar Edilen Denemeler
 - a. Birleştirilmiş deneyler
 - b. Çoklu denemeler
4. Rastlantı Değişkenleri (Tek Rastlantı Değişkeni)
 - a. Beklendik değer ve varyans
 - b. Olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları, Gaussian ve diğer yoğunluk fonksiyonları
 - c. Koşullu Dağılımlar
 - d. Baye's teoremi (yoğunluk ve dağılım fonksiyonlarına genişletim)
5. Tek Bir Rastlantı Değişkeninin Fonksiyonları
 - a. Rastlantı değişkeni $g(x)$
 - b. $g(x)$ ' in dağılım fonksiyonları
 - c. Momentler
 - d. Karakteristik fonksiyonlar
6. İki Rastlantı Değişkeni
 - a. Birleşik dağılım ve yoğunluk fonksiyonları
 - b. İki rastlantı değişkenine ait fonksiyonlar
 - i. İki rastlantı değişkeninin tek bir fonksiyonu
 - ii. İki rastlantı değişkeninin iki fonksiyonu
 - iii. Birleşik momentler, beklendik değer
 - iv. Koşullu İstatistikler
7. Merkezi Limit Teoremi
8. Kovaryans ve İlişki.

1. Olasılığa Giriş

Olasılık teorisi belirsizliğin matematiksel olarak modellenmesi ile ilgilenir. Evrende gerçekleşen bütün olayların “GİZLİ” bir değişkenin fonksiyonları olduğunu düşünürsek, bu değişken ve fonksiyonların bilinmesi/tanımlanabilmesi halinde “belirsizlikler” ortadan kalkar. Tabii ki bu değişkenin ve fonksiyonların “KESİN” olarak bilinmesi pratikte mümkün değildir. Bunun için “OLASILIK TEORİSİ” “TEKRARLANAN” olayların ortalama davranışlarına odaklanır.

“TEKRARLANAN” olaylar için gözlemler yapıldığında ve özellikle gözlemlerin sayısı artırıldığında belli ortalamaların sabit değerlere yaklaştığı ve bu ortalama değerler daha sonraki olayların katılmasıyla dahi değişmeme eğiliminde olduğu gözlemlenmiştir. Tekrarlanan olaylara örnek olarak; elektron yayını, telefon aramaları, radar algılaması, kalite kontrolü, sistem çökmesi, yazı-tura atılması vb. olayları verebiliriz. ***Basitçe anlatmak gerekirse, bu teorinin amacı olayların ortalama davranışlarını olayların olasılıkları cinsinden tanımlamak ve kestirmektir.***

1.1. Olasılığın Mühendislikteki Uygulamaları

Olasılık mühendislik alanında birçok uygulama alanına sahiptir. Elektrik-Elektronik Mühendisliği alanına giren uygulamalarından bazıları

- Elektrik devrelerde ısı gürültü
- Zayıf radar ve radyo sinyallerinin algılanması
- Enformasyon Teorisi
- Haberleşme Sistem Tasarımı
- Sistemlerin Güvenilirliği
- Sistem/Cihaz Hata/Başarısızlık Oranları ve Olasılıkları
- Haberleşme Ağları, ör: Ağ Trafik

şeklinde sıralanabilir.

1.2. Çeşitli Olasılık Tanımları

Olasılığın tanımı genel olarak 3 temel yaklaşımla yapılır.

1.2.1. Klasik Tanım

Deneye dayalı olmayan bu tanımda bir “A” olayının olasılığı, o olayın gerçekleşebileceği farklı durumları sayıp (N_A), bu sayının mümkün olan bütün sonuçlara oranını “ÖNCEDEN” hesaplayarak bulunur. 2 kere arka arkaya yazı-tura atılmasını ele alalım,

		2.PARA	
		Yazı (Y)	Tura (T)
1. PARA	Yazı (Y)	YY	YT
	Tura (T)	TY	TT

Bu durumda görüldüğü gibi toplam 4 tane olası sonuç var. Eğer biz her iki paranın yazı gelmesi olasılığını “YY” arıyorsak, bu durumda bu olayın olasılığı 1/4 olur. Eğer en az bir paranın Y gelmesi olasılığını arıyorsak, bu durumda YY, TY ve YT sonuçlarından herbiri bizim aradığımız sonuçlarıdır. Dolayısıyla bu olayın olasılığı bu kez 3/4 olur.

Klasik teori iki açıdan yetersizdir

1. Eşit şansa sahip olmayan olaylar için doğru sonuç vermez.

Mesela atılan iki zarın toplamının 3 olması olasılığını arayalım. Bu durumda mümkün toplamlar {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} olabilir. Yani 11 farklı sonuç mümkündür. Dolayısıyla toplamın 3 olması olasılığı 1/11 dir diyebiliriz. Ancak tabii ki bu sonuç YANLIŞ'tır. Çünkü toplamın 2 olması ve 3 olması aynı şansa sahip değildir. Yukarıdaki gibi bir tablo yaparak doğru sonucun 1/18 olduğu çok rahatlıkla görülebilir.

2. Sayılamayacak kadar çok olası sonucu olan durumlarda yaklaşımlara başvurmadan çözüm üretmez.

1.2.2. Bağıl Frekans Tanımı

Bir A olayının olasılığını bağıl frekans yoluyla belirlemek bir denemeyi n kere tekrarlamaktan geçer. Bu n deneme esnasında A olayının görüldüğü durumlar sayılır ve bu n_A olarak kaydedilir ve A olayının olasılığı

$$P(A) = n_A/n \text{ olarak verilir.}$$

$n_A < n$ olduğundan $P(A)$ 0 ve 1 arasındadır ($0 < P(A) < 1$). Bu teoriyle ilgili problemlerden bir tanesi hiç bir zaman sonsuz sayıda deneme yapamayacak olmamızdır. Bu durumda $P(A)$ ' yi sonlu sayıdaki denemelerden kestirmek durumunda kalırız. Daha sonrada bu oranının n sonsuz olduğu durumda bir limit değerine yaklaştığını savunuruz. Yani

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n) \text{ olarak verilir.}$$

Bu probleme rağmen bağıl frekans yaklaşımı, olasılık teorisini gerçek dünyadaki olaylara uygulamada önemli bir yere sahiptir.

1.2.3. Aksiyomatik Tanım

Çoğu modern olasılık kitabında kullanılan tanım bu tanımdır. Ancak bu tanıma yapmadan önce temel birkaç kavram üzerinde durmamız gerekmektedir.

1.3. Kümeler ve Olaylar

Küme: Belirlenmiş nesnelere topluluğuna küme denir. Örnek olarak;

$A = \{\text{sınıfta boyu 1.80'nin üzerinde olan öğrenciler}\}$, $B = \{3,5,8\}$ kümeleri verilebilir.

Alt Küme: Bütün elemanları daha büyük bir kümenin içinde yer alan küme. Örneğin $C=\{5,8\}$ kümesi $B=\{3,5,8\}$ kümesinin bir alt kümesidir.

Boş Küme: Hiç bir elemanı olmayan küme. \emptyset yada $\{ \}$ ile gösterilir.

Örnek Uzayı: Bir 'H' deneyinin bütün olası sonuçlarını içeren kümeye örnek uzayı denir. Genelde bu küme Ω ile gösterilir. Her küme aynı zamanda kendinin alt kümesi olduğundan, Ω da bir olaydır.

Olay: Örnek uzayının alt kümeleri **olay** olarak adlandırılır.

Kesin Olay: Örnek uzayının kendisi kesin olaydır.

İmkansız Olay: Olması mümkün olmayan olaydır. Küme teorisinde boş kümeye tekabül eder.

Örnek:

1. Yazı-Tura atma deneyi

$\Omega=\{Y,T\} \rightarrow$ Örnek uzayı

$A=\{Y\} \rightarrow$ Yazı gelmesi OLAYI

2. 2 kere Yazı-Tura atma deneyi

$\Omega=\{YY,YT,TY,TT\} \rightarrow$ Örnek uzayı

$A=\{YT,TY\} \rightarrow$ Bir yazı ve bir tura gelmesi OLAYI

3. Bir direncin gücünü ölçme deneyi

$\Omega=\{P:P \geq 0\} \rightarrow$ Yani 0'dan büyük bütün sayılar örnek uzayımızı oluşturuyor.

4. Elastik bir çarpışmada nükleer bir parçacığın, çarpışma sonrası ayrılış açısını gözlemlene deneyi

$\Omega=\{\theta: -\pi \leq \theta \leq \pi\} \rightarrow$ Örnek uzayı

$B=\{-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2\} \rightarrow$ Ayrılma açısının $-\pi/4$ ve $\pi/2$ arasında olması olayı.

Küme İşlemleri

$p \in A$: p, A kümesinin bir elemanıdır.

$A \subset B$: A kümesi B kümesinin alt kümesidir (A kümesinin bütün elemanları B kümesinin de elemanıdır).

$A=B$: A'nın her elemanı B'nin ve B'nin her elemanı da A'nın da elemanı ise A ve B kümeleri eşittir.

$p \in A, A \subset B, A=B$ ifadelerinin karşıtı sırasıyla $p \notin A, A \not\subset B, A \neq B$ şeklinde yazılır.

\emptyset : Boş küme.

Ω : Evrensel Küme (Örnek Uzayı).

Not: Herhangi bir A kümesi için $\emptyset \subset A \subset \Omega$ ifadesi yazılabilir.

GİRİŞ

A ve B herhangi iki küme olsun $A \cup B$ ile gösterilen A ve B kümelerinin birleşimi A'ya ya da B'ye bağlı elemanlar kümesidir.

BİRLEŞİM $\Rightarrow A \cup B = \{x: x \in A \text{ ya da } x \in B\}$

Örnek: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,8\} \Rightarrow A \cup B = \{1,2,3,4,8\}$

$A \cap B$ ile gösterilen A ve B nin arakesiti (kesişimi) A ve B kümelerinin her ikisine birden bağlı elemanların kümesidir

KESİŞİM $\Rightarrow A \cap B = \{x: x \in A \text{ ve } x \in B\}$

Örnek: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,5\}$, $A \cap B = \{3\}$

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise yani A ve B nin ortak elemanı yoksa A ve B ye "AYRIK" kümeler denir.

A ve B arasındaki ayrım ya da $A \setminus B$ biçiminde gösterilen B kümesinin A ya bağlı olup B ye bağlı olmayan elemanların kümesidir.

FARK $\Rightarrow A \setminus B = \{x: x \in A \text{ ve } x \notin B\}$

Burada $A \setminus B$ ve B nin ayrık olduğuna yani $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ olduğuna dikkat ediniz.

Örnek: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,5\} \Rightarrow A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{5\}$

$(A \setminus B) \cap B = \{1,2\} \cap \{3,5\} = \emptyset$

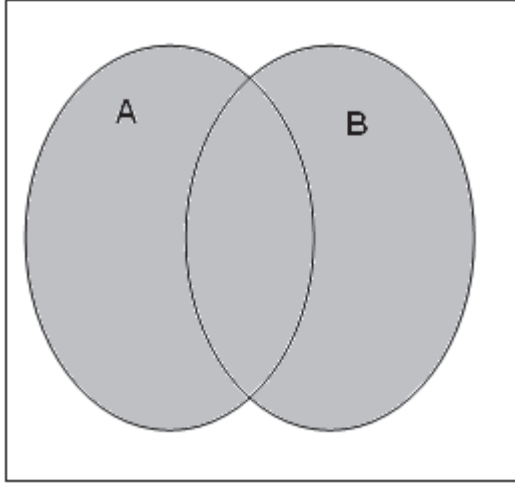
$(B \setminus A) \cap A = \{5\} \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

A^c biçiminde gösterilen A'nın salt tümleyeni A ya bağlı olmayan ve örnek uzayına bağlı olan elemanların kümesidir.

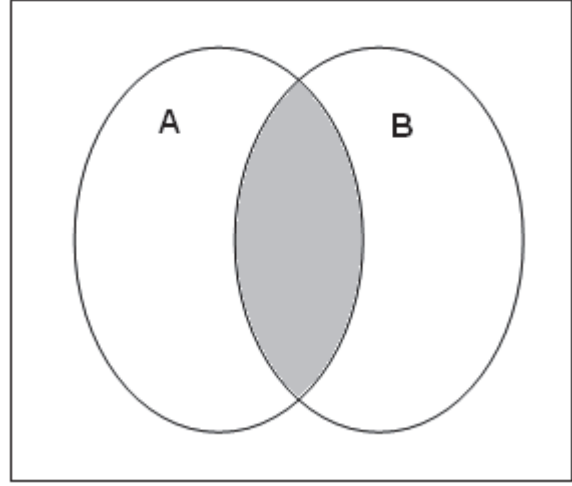
TÜMLEYEN $\Rightarrow A^c = \{x: x \in \Omega \text{ ve } x \notin A\}$

Örnek : $A = \{3,5\}$, $\Omega = \{1,3,5,7\} \Rightarrow A^c = \{1,7\}$

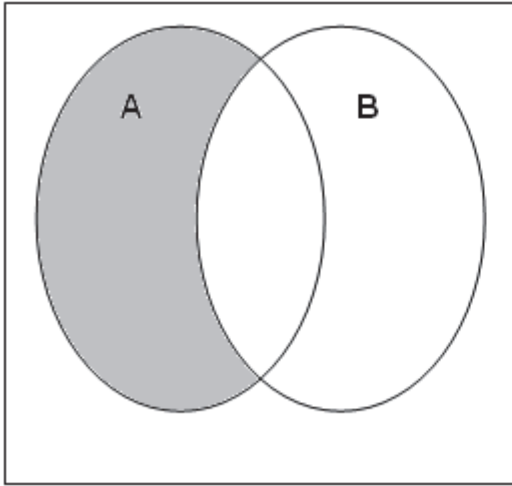
Ω : Evrensel küme.



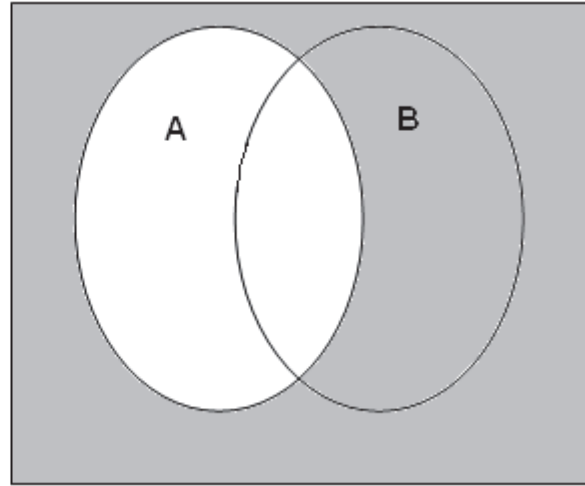
Taralı Alan: $A \cup B$



Taralı Alan: $A \cap B$



Taralı Alan: $A \setminus B$



Taralı Alan: A^c

KÜME İŞLEM KURALLARI

- 1) Tanımlama Kuralı: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- 2) Birliktelik : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- 3) Değişme : $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- 4) Dağılma : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- 5) Özdeşlik : $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$
- 6) Tümlleme : $A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \emptyset$, $(A^c)^c = A$, $\Omega^c = \emptyset$, $\emptyset^c = \Omega$
- 7) De Morgan : $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

OLASILIĞIN AKSİYOMATİK TANIMI

Olasılık bir $P[]$ küme fonksiyonudur ve bu fonksiyon her bir A olayına "A olayının olasılığı" diye adlandırılan bir $P[A]$ değeri atar. Bu $P[A]$ değeri aşağıdaki aksiyomlara uyar.

- 1) $P[A] \geq 0$
- 2) $P[\Omega] = 1$
- 3) $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ Eğer $A \cap B = \emptyset$

Bu aksiyomlar aşağıdaki sonuçları oluşturmak için yeterlidir.

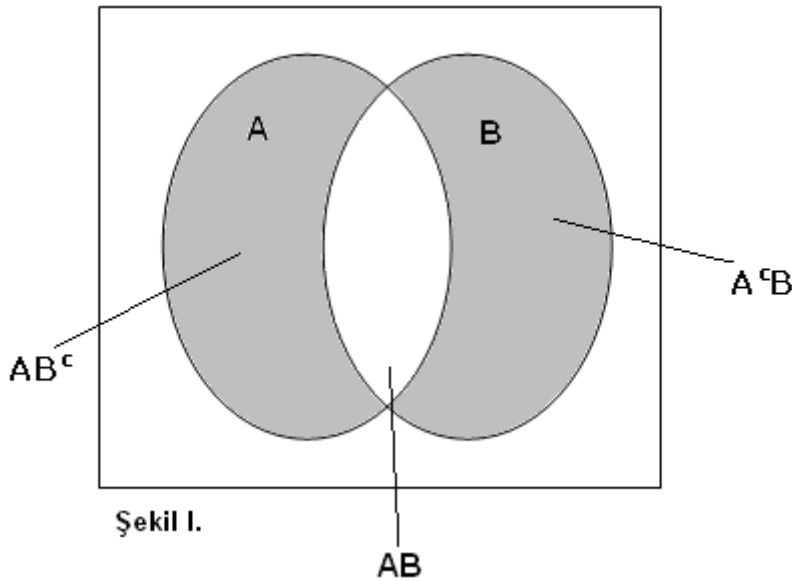
- 4) $P[\emptyset] = 0$
- 5) $P[A \cap B^c] = P[A] - P[A \cap B]$
- 6) $P[A] = 1 - P[A^c]$
- 7) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

Bu noktadan itibaren $A \cup B$ yerine $A+B$ ve $A \cap B$ yerine AB notasyonunu değişimli olarak kullanacağız.

Örnek:

7. Özelliği aksiyomları kullanarak ispatlayalım
 $A \cup B = AB^c \cup A^cB \cup AB$ { $A \cup B$ olayını 3 ayrıklı olaya böldük}

Şekil I. Görüldüğü gibi bu üç olayın birbiriyle hiç bir ortak noktası yoktur. Dolayısıyla bu olaylar ayrıklı olaylardır.



Üçüncü aksiyomu kullanırsak ,

$$\begin{aligned}
P[A \cup B] &= P[AB^c \cup A^cB] + P[AB] \\
&= P[AB^c] + P[A^cB] + P[AB] \\
&= P[A] - P[AB] + P[B] - P[AB] + P[AB] \\
&= P[A] + P[B] - P[AB]
\end{aligned}$$

Örnek:

Bir torbadan 1 ile 12 arasında numaralandırılmış topları çekme deneyini ele alalım.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ olur.

A olayını 1 ile 6 arasındaki topları çekme, **B** olayını da 3 ile 9 arasındaki topları olarak tanımlayalım.

Yani

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ ve $B = \{3,4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $AB = \{3,4,5,6\}$, $AB^c = \{1,2\}$

$B^c = \{1,2,10,11,12\}$, $A^c = \{7,8,9,10,11,12\}$, $A^cB^c = \{10,11,12\}$

$(AB)^c = \{1,2,7,8,9,10,11,12\}$

Dolayısıyla ,

$$P[A] = P[\{1\}] + P[\{2\}] + \dots + P[\{6\}]$$

$$P[B] = P[\{3\}] + P[\{4\}] + \dots + P[\{9\}]$$

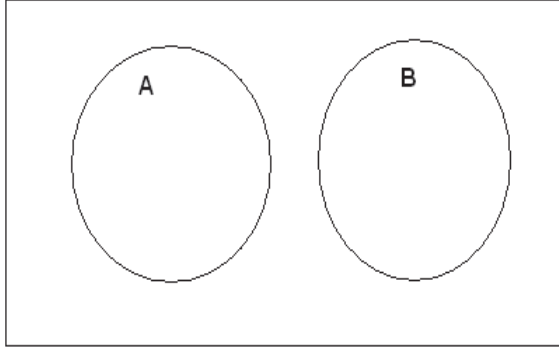
$$P[AB] = P[\{3\}] + P[\{4\}] + \dots + P[\{6\}]$$

Eğer $P[\{1\}] = \dots = P[\{12\}] = 1/12 \Rightarrow P[A] = 1/2, P[B] = 7/12$ ve $P[AB] = 4/12$ olur.

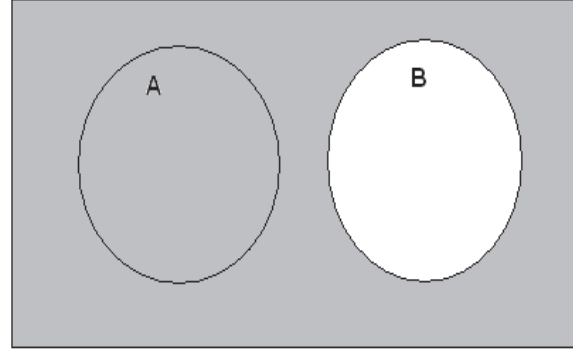
NOT : $\{1,2,3, \dots, N\}$ gibi N elemanı olan kümeden bu N elemanında eşit şansla bu kümede bulunması koşuluyla bir eleman seçme olayının olasılığı $P = 1/N$ dir.

Örnek:

$A \cap B = \emptyset$ iken $A \subset B^c$ olduğunu ispatlayınız?



$$A \cap B = \emptyset$$



B^c taralı alandır dolayısıyla
 $A \subset B^c$

Örnek:

$A = \{0\}$ ise $\emptyset = A$ doğrumudur?

A kümesi elemanı "0" olan 1 elemanlı bir kümedir. Dolayısıyla A kümesi hiçbir elemanı olmayan \emptyset kümeyle eşit olamaz.

Örnek:

Bir fabrikadaki çalışanların 30'u baskı devre, 25'i tasarım ve 10 tanesi de hem baskı devre hem de tasarım kısmında çalışabilecek durumda işçilerdir. Bu işletmeden rastgele seçilen bir kişinin baskı devre bölümünde çalışabilme ihtimali nedir?

$A = \{x: x, \text{ baskı devre kısmında çalışabilecek kişi}\}$

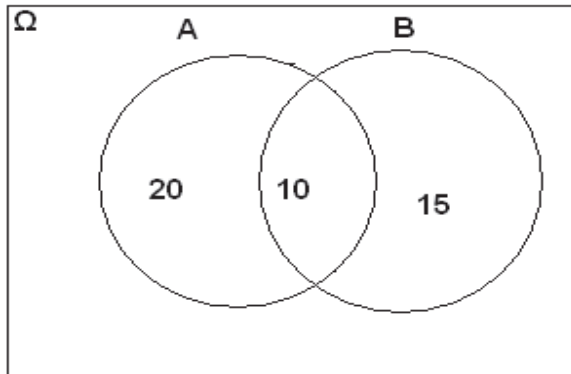
$B = \{x: x, \text{ tasarım kısmında çalışabilecek kişi}\}$

A kümesi 30 eleman içeriyor $s(A) = 30$

B kümesi 25 eleman içeriyor $s(B) = 25$

$A \cap B$ kümesi 10 eleman içeriyor $s(A \cap B) = 10$

7. Özellikten $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) \Rightarrow s(A \cup B) = 30 + 25 - 10 = 45$



Not: $\Omega = A \cup B$

$P(A) = n_A/n = 30/45$ olur.

BİLEŞİK, KOŞULLU, TOPLAM OLASILIKLAR VE BAĞIMSIZLIK

Aşağıdaki A , B ve C olaylarını ele alalım

A:{Erzurum da herhangi bir günde sıcaklığın 15°C'nin üzerinde olması}

B:{ Erzurum da herhangi bir günde 1cm üzeri yağış olması}

C:{A ve B olaylarının her ikisinin de aynı günde gerçekleşmesi}

Yani $C \triangleq AB$

Bu C olayına A ve B'nin "Birleşik olasılığı" denir. Bu kavram 2 den fazla olay için de geçerlidir. Örneğin herhangi bir E,F,G olayların bileşik olasılığı $H=EFG$ olarak verilir.

Olasılığın Frekans tanımından hareketle,

$$P[A] = n_A / n , P[B] = n_B / n \text{ ve } P[AB] = n_{AB} / n$$

Şimdi n_{AB}/n_A oranına bakalım.Bu oran A olayının ve AB olayının gerçekleşmesi arasındaki bağıl frekanstır.

Bu oran sıcaklığın 15°C olduğu günlerde yağışın da 1 cm'nin üzerine çıktığı günlerin oranını verir. Yani başka bir olayın olması "koşuluna" dayalı bir olasılık var karşımızda.

Ufak bir matematiksel düzenlemeyle,

$$n_{AB} / n = (n_{AB} / n) / (n_A / n) = P[AB] / P[A] \text{ olduğu görülür.}$$

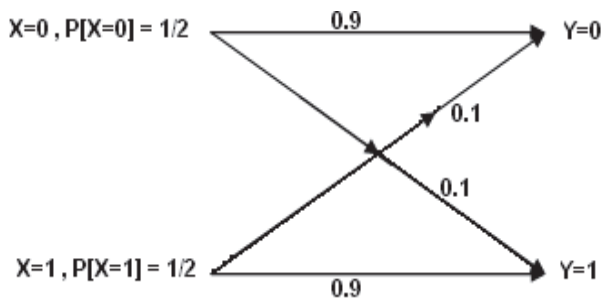
Bu olayda A olayının olması koşuluyla B olayının olması ihtimali $P(B|A)$ tanımlamamızı sağlar.

$$n_{AB} / n_A = P(B|A) = P(AB) / P(A) , \text{ tabii ki } P(A) > 0 \text{ olmalı}$$

ve benzer yolla

$$P(A|B) = P(AB) / P(B) \text{ ifadesi yazıla bilir. Tabii ki } P(B) > 0 \text{ olmalı.}$$

Örnek:



Yandaki şekilde gösterilen bir ikili haberleşme sisteminde 0 ve 1 sembollerinin iletildiği bir sayısal haberleşme yapılmaktadır. Bu sistemde "Y" alınan sembolü, "X" ise gönderilen sembolü göstermektedir.

Bu sistemin Örnek Uzayı olan “ Ω ”

$$\Omega = \{(x,y) : x=0 \text{ veya } 1, y=0 \text{ veya } 1\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

X olayı $X = \{(x,0), (x,1)\}$ ile verilmektedir.

Y olayı $Y = \{(0,y), (1,y)\}$ ile verilmektedir.

$$P[(x,y) = (i,j)] = P[x=i] P[y=j | x=i] \quad ; \quad i,j = 0, 1$$

Bu sistemde haberleşme sistemindeki gürültüden dolayı gönderilen 0 bazen 1 bazen 0 olarak alınabilmektedir. Aynı zaman da gönderilen 1’de bazen 0 bazen 1 olarak alınabilmektedir.

Yapılan ölçümler neticesinde aşağıdaki olasılıklar bilinmektedir.

$$\begin{aligned} P[y=1|x=1] &= 0.9 & ; & & P[y=1|x=0] &= 0.1 \\ P[y=0|x=1] &= 0.1 & ; & & P[y=0|x=0] &= 0.9 \end{aligned}$$

Aynı zamanda haberleşme sisteminin tasarımından gelen bir özellikte 0 üretilme olasılığı 1 üretilme olasılığına eşit olup

$$P[x=0] = P[x=1] = 1/2$$

=> Bazı bileşik olasılıklara bakalım

$$P[x=0, y=0] = P[y=0|x=0] P[x=0] = 0,9 * 0,5 = 0,45$$

$$P[x=0, y=1] = P[y=1|x=0] P[x=0] = 0,1 * 0,5 = 0,05$$

Aynı şekilde $P[x=1, y=0] = 0,05$ ve $P[x=1, y=1] = 0,45$

KOŞULSUZ OLASILIK

Çoğu mühendislik veya bilimsel problemde başka olaylara bağlı olmayan “KOŞULSUZ OLASILIK” bulmak isteriz. Bir B olayına ilişkin bu koşulsuz olasılık koşullu olasılıkların ağırlıklı ortalaması cinsinden verilebilir. Bu hesaplama aşağıdaki teorem vasıtasıyla yapılır.

Teorem:

A_1, A_2, \dots, A_n ayrık olaylar ve $(\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega)$ olsun. B olayı da A_i ’lerin oluşturduğu bu olasılık uzayında tanımlanmış bir olay olsun. O zaman $P[A_i] \neq 0$ olmak koşuluyla

$$P[B] = P[B|A_1].P[A_1] + P[B|A_2].P[A_2] + \dots + P[B|A_n].P[A_n]$$

Bazen $P[B]$, eşitliğin sağ tarafındaki hesaplamanın doğası gereği ortalama olasılık olarak da adlandırılır.

İspat:

A_i 'ler ayrık olduğundan $A_i A_j = \emptyset$, $i \neq j$ iken ve $(\prod_{i=1}^n A_i = \Omega)$ ve

$$B \cap \Omega = B \cap \prod_{i=1}^n A_i = \prod_{i=1}^n B A_i$$

$B A_i \subset A_i$ dir. Dolayısıyla $(B A_i)(B A_j) = \emptyset$, her $i \neq j$ için.

Aksiyom 3'ü kullanırsak (n olaya genişletilerek);

$$\begin{aligned} P[B] &= P[\cup_{i=1}^n B A_i] = P[B A_1] + P[B A_2] + \dots + P[B A_n] \\ &= P[B | A_1].P[A_1] + P[B | A_2].P[A_2] + \dots + P[B | A_n].P[A_n] \end{aligned}$$

Örnek:

Bir önceki örnekle verilen ikili haberleşme sistemi için $P[y=0]$ (0 alınma) ve $P[y=1]$ (1 alınma) olasılıklarını hesaplayalım.

$$\begin{aligned} P[y=0] &= P[y=0 | x=0] P[x=0] + P[y=0 | x=1] P[x=1] \\ &= 0,9 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[y=1] &= P[y=1 | x=0] P[x=0] + P[y=1 | x=1] P[x=1] \\ &= 0,9 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,5 \end{aligned}$$

$P[y=1]$ i ayrıca $\{y=0\} \cup \{y=1\} = \Omega$ olduğundan dikkat ederek,

$P[y=0] + P[y=1] = 1$ den {Aksiyom 2} hesaplayabiliriz.

BAĞIMSIZLIK:

Olasılığın oldukça önemli kavramlarından biridir. Ayrı örnek uzayında tanımlı A ve B olayına yalnız ve yalnız

$$P[AB] = P[A].P[B] \text{ ise "BAĞIMSIZ" dır.}$$

Genel ifadesiyle $P[AB] = P[B | A].P[A] = P[A | B].P[B]$ olduğundan Bağımsız olaylar için

$$P[B | A] = P[B]$$

$$P[A | B] = P[A] \text{ dir.}$$

Dolayısıyla bağımsızlık tanımı A, B olaylarının bağımsız olduğu durum için A olayının üzerinde ve B olayının da A üzerinde hiçbir etkisi olmadığını söylemektedir. Bu tanımda temel kavramlarımızla aynı doğrultudadır

3 farklı A,B,C olayı için $\{P(A) \neq 0, P(B) \neq 0, P(C) \neq 0\}$ olmak kaydıyla

Bağımsız olma Şartı $\{P(A) \neq 0, P(B) \neq 0, P(C) \neq 0\}$ olmak kaydıyla

$$P[ABC] = P[A] P[B] P[C]$$

$$P[AB] = P[A] P[B], P[BC] = P[B] P[C], P[AC] = P[A] P[C]$$

3 olayın bağımsız olması için sadece $P[ABC] = P[A] P[B] P[C]$ 'nin yeterli olmadığına ve her ikilinin de bağımsız olması gerektiğine dikkat edin.

BAYES TEOREMİ:

Önceki sonuçların ışığında oldukça basit ve aynı zamanda çok geniş kullanım alanına sahip olan BAYES formülünü yazabiliriz.

$$P[B] > 0 \text{ ve } P[A_i] \neq 0, \quad \forall i \text{ için}$$

$$P[A_j | B] = \frac{P[B|A_j] \cdot P[A_j]}{\sum_{i=1}^n P[B|A_i] \cdot P[A_i]}$$

İspat:

Paydadaki ifade $P[B]$ ye eşittir. Dolayısıyla BAYES teoremi koşullu olasılığın bir uygulamasıdır.

NOT:

$P[A_j | B]$ 'ye A_j 'nin B koşuluna bağlı "sonradan" olasılığı denir. $P[B | A_j]$ 'ye ise B 'nin A_j 'ye koşuluna bağlı "önceden" olasılığı denir.

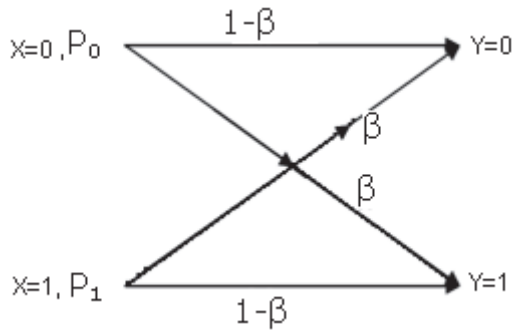
Genelde pratikte "sonradan" olasılıklar gözlemler sonucunda hesaplanır, "önceden" olasılıklar ise geçmiş ölçümlere dayanılarak kestirilir (Tahmin edilir.)

Örnek:

Bir haberleşme kanalında P_0 ihtimalle 0, P_1 ihtimalle 1 gönderilmektedir.

($P_1=1-P_0$) Kanaldaki gürültü dolayısıyla β olasılığı ile 0, $1-\beta$ olasılığıyla da 1 alınıyor.

Alıcıda 1 gözlemlendiğine göre 1 gönderilmiş olma olasılığı nedir?



Cevap:

Kanalın yapısı yukarıda verilmiştir. $P[X=1 | Y=1]$ olasılığını arıyoruz.

$$\begin{aligned}
 P[X = 1 | Y = 1] &= \frac{P[X = 1 | Y = 1]}{P[Y = 1]} \\
 &= \frac{P[Y = 1 | X = 1] \cdot P[X = 1]}{P[Y = 1 | X = 1] \cdot P[X = 1] + P[Y = 1 | X = 0] \cdot P[X = 0]} \\
 &= \frac{P_1(1 - \beta)}{P_1(1 - \beta) + P_0\beta}
 \end{aligned}$$

Örnek:

Bir kanser testine ilişkin aşağıdaki sonuçlar tanımlanıyor olsun

A : Teste göre test edilen kişi kanser.

B : Kişi gerçekten kanser.

A^c: Teste göre test edilen kişi kanser değil.

B^c: Kişi gerçekten kanser değil.

Ve aşağıdakilerin de bilindiğini varsayalım.

$$P[A|B] = P[A^c|B^c] = 0.95 \quad \text{ve} \quad P[B] = 0.005$$

Bu test "İYİ" bir test midir?

Cevap:

Bu soruyu cevaplamak için testin kanser teşhisi koyduğu kişinin gerçekten kanser olma ihtimalinin ne olduğunu bilmemiz gerekir. Yani $P[B|A]$ ya bakmalıyız.

$$\begin{aligned} P[B|A] &= \frac{P[A|B].P[B]}{P[A|B].P[B] + P[A|B^c].P[B^c]} \\ &= \frac{(0,005). (0,95)}{(0,005). (0,95) + (0,05). (0,995)} \\ &= 0,087 \end{aligned}$$

Yan sadece testlerin olduğunu söylediği kişilerin gerçekten kanser olma ihtimali %8,7 dır. Geri kalan %91,3 lk kısımda kanser teşhisi konulan kişi kanser olmayacaktır. Dolayısıyla "İYİ BİR TEST DEĞİL"

Bu sonuç şaşırtıcı gibi gözükse de kanser olan ve olmayanların sayısı arasındaki dengesizlik (yani kanser olanların azlığı) testi başarısız kılmaktadır.

SAYMA FORMÜLLERİ

Yerine koyarak rnekleme:

Bir torbadaki numaralandırılmış toplar önce çekiliyor numarası kaydediliyor sonra tekrar torbaya konuluyor. Bu durumda ilk örneklemede "n" tane (torbada n tane top olduğu varsayımıyla) farklı seçenek ve ikinci örneklemede yine "n" tane farklı seçenek söz konusudur. Sonuç olarak "n" elemanı olan torbadan "r" elemanlı "n^r" tane farklı sıralanmış örnekler elde edilebilir.

Yerine koymadan rnekleme:

Yine yukarıda bahsedilen durum için bu sefer çekilen topların yerine geri konulmadığını düşünelim. Dolayısıyla ilk için “n” top varken ikinci çekim için “n-1” top üçüncüde “n-2” şeklinde azalan sayıda top olacaktır.

Sonuç olarak:

$$(n)_r \triangleq n(n-1)(n-2)(n-3) \dots \dots \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

↳ Bu durumda oluşabilecek şekillerin sayısı

$$(n)_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ kadar "farklı sıralanmış" örnek elde edilebilir.}$$

“n” elemanlı bir popülasyondan oluşabilecek “r” elemanlı alt popülasyonlar:

Olasılıkta oluşabilecek temel sorulardan biridir. Örneğin 1’den 4’e kadar numaralandırılmış topları ele alalım. Bu toplardan 2’li kaç grup oluşturulabilir?

$$\left. \begin{array}{l} (1,2) \quad (2,3) \quad (3,4) \\ (1,3) \quad (2,4) \\ (1,4) \end{array} \right\} \text{ 6 tane grup } \left[\begin{array}{l} \text{Bu yerine koymadan örnekleme} \\ \text{yapılan elde edeceğimiz} \\ \text{4x3=12 den küçüktür.} \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} (1,2) \quad (2,1) \quad (3,1) \quad (4,1) \\ (1,3) \quad (2,3) \quad (3,2) \quad (4,2) \\ (1,4) \quad (2,4) \quad (3,3) \quad (4,3) \end{array} \right\} \text{ 12 } \longrightarrow \text{ Yerine koymadan}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1,1) \quad (2,1) \quad (3,1) \quad (4,1) \\ (1,2) \quad (2,2) \quad (3,2) \quad (4,2) \\ (1,3) \quad (2,3) \quad (3,3) \quad (4,3) \\ (1,4) \quad (2,4) \quad (3,4) \quad (4,4) \end{array} \right\} \text{ Yerine koyarak örneklemede ise} \\ \text{4x4=16 grup elde edilir.}$$

Bize 6 farklı grup veren dizilim için genel bir formül elde edilir. Bu dizilime n’in r’li kombinasyonu denir ve C_r^n sembolü ile gösterilir.

“r” tane elemandan oluşan popülasyon için r! tane farklı dizilim söz konusudur. Dolayısıyla C_r^n alt popülasyonu için $C_r^n \cdot r!$ tane farklı sıralamadan bahsedebiliriz.

Bu durumda,

$$C_r^n \cdot r! = (n)_r$$

$$C_r^n = \frac{(n)_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!} \triangleq \binom{n}{r}$$

$C_r^n \triangleq \binom{n}{r}$ ye aynı zamanda binom katsayısı denir.

$$\text{Ve } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \triangleq \binom{n}{n-r} = C_{n-r}^n$$

Yani $C_r^n = C_{n-r}^n$

Not: $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$

BERNOULLI DENEMELERİ

Sonucu "P" olasılığı ile başarı $\{\xi_1=s\}$ ve $q=1-p$ olasılığı ile başarısızlık $\{\xi_1=f\}$ olsun ve tek bir deneme içeren bir denemeyi ele alalım. Bu durumda örnek uzayı $\Omega=\{s,f\}$ olur. Bu deneyi tekrarladığımızı varsayalım bu durumda yeni örnek uzayı $\Omega_2=\Omega \times \Omega$ olur ve $\Omega_2 = \{ss, sf, fs, ff\}$. Bu uzay $2^2=4$ tane olay içerir $\Omega \times \Omega$ çarpımı "KARTEZYEN ÇARPIMI" olarak adlandırılır. Eğer n tane "bağımsız" deneme yaparsak örnek uzayı

$$\Omega_n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_{n \text{ - kere}}, \quad \text{olur ve bu örnek uzay } 2^n \text{ eleman içerir.}$$

$$\Omega_n = \{a_1, \dots, a_\mu\} \quad \mu = 2^n$$

$$a_i = Zi_1 \dots \dots \dots Zi_n \quad , \quad Zi_j = s \text{ veya } f$$

Her bir Zij sonucu diğerlerinden bağımsız olduğundan $P[Zi_1 \dots \dots \dots Zi_n] = P[Zi_1] \cdot P[Zi_2] \dots \dots \dots \dots \dots P[Zi_n]$ olur. Dolayısıyla "k" başarı ve "n-k" başarısızlık içeren bir sıralı kümenin olasılığı " $p^k q^{n-k}$ "dır. Örneğin 3 kez yazı, tura attığımızı düşünelim. " $p=P\{Y\}$ ve $q=P\{T\}$ " olsun.

$P\{YTY\}=pqp=p^2q$ olur. Bize aynı başarı olasılığını verecek farklı sıralamalar da mümkün. Bunların sayısı da

$$C_k^n = \binom{n}{k} \text{ dır.}$$

Yani "n" denemeden "k" başarı ve "n-k" başarısızlık ihtimali var. Bu da

$$P(k \text{ başarı, } n - k \text{ başarısızlık}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \triangleq b(k; n, p)$$

Tanımladığımız bu " $b(k;n,p)$ " ye "Binom Kanunu" denir. "n" deneme yaparak "k" başarı elde etme ihtimali arama olayına da "Binom Denemeleri" denir.

Örnek:

Saniyede 10 bağımsız bit üreten alınmaktadır. Hatalı bit alınma olasılığı (0 gönderilip 1 alınması yada tam tersi) 0,001 dir. Saniyede “En Az” bir hata olma olasılığı nedir.

Cevap:

$$\begin{aligned}
 P(\text{En az bir hata}) &= 1 - P(\text{hiç hata olmama}) \\
 &= 1 - \binom{10}{0}(0,001)^0(0,999)^{10} \\
 &= 1 - (0,999)^{10} \\
 &\cong 0,01
 \end{aligned}$$

Binom kanunu ile ilgili formüller:

1) “k” yada daha az başarı olma ihtimali

$$= \sum_{i=0}^k b(i; n, p) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

2) En az “k” başarı olma ihtimali

$$= \sum_{i=k}^n b(i; n, p) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

3) En az “j” en fazla “k” başarı olma ihtimali

$$= \sum_{i=j}^k b(i; n, p) = \sum_{i=j}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

Örnek:

$$\Omega=\{1,2,3,4\} \quad , \quad A=\{1,2\} \quad , \quad B=\{2,3\} \quad , \quad C=\{3,4\}$$

$P(ABC) = P(A|B)P(B|C)P(C)$ Eşitliği acaba sağlanır mı? Ona bakalım.

Cevap:

$$AB=\{2\} \quad , \quad BC=\{3\} \quad , \quad AC=\emptyset$$

$$P(A)=P(B)=P(C) = \frac{1}{2} \quad \quad P(AB)=P(BC) = \frac{1}{4}$$

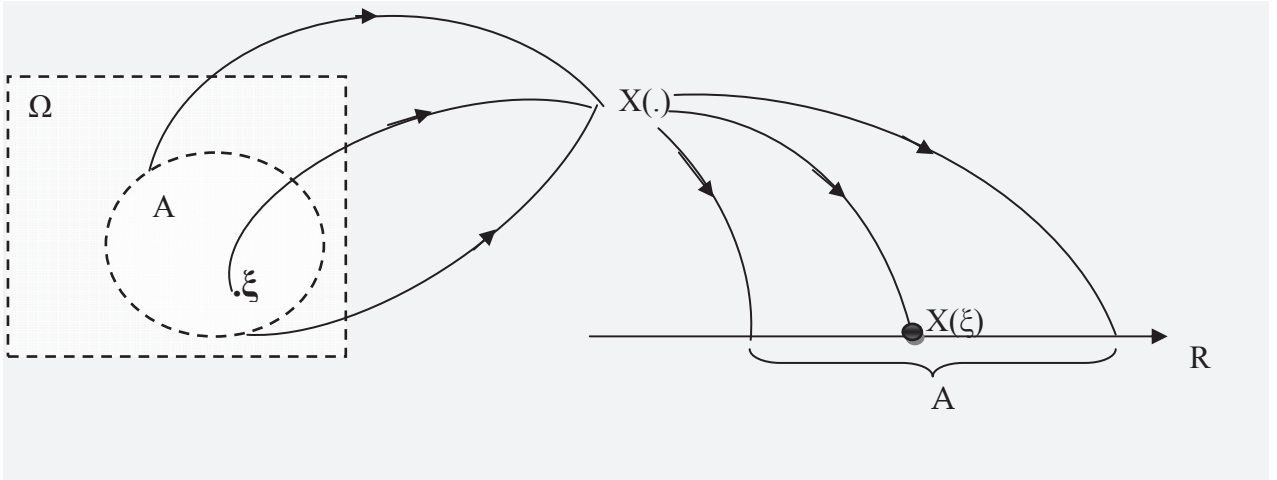
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} \quad , \quad P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B)P(B|C)P(C) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \quad ABC = \emptyset \quad \text{olduğundan} \quad P(ABC) = 0 \quad \text{olur.}$$

RASLANTI DEĞİŞKENLERİ

Raslantı değişkeni kavramı orijinal örnek(olasılık)uzayının yerine olayların rakam kümelerinden oluşturduğu bir uzayı kullanmamızı yani reel(R) ekseninde çalışabilmemizi mümkün kılacaktır.

Örnek uzayı " Ω " olan bir H deneyini ele alalım. Ω örnek uzayının elemanları (ξ) H deneyinin rasgele sonuçlarıdır. Eğer her bir eleman (ξ) için reel bir sayı kullanırsak ξ 'ler ve reel(R) eksen arasında bir karşılık bulma kuralı buluruz. Bu kuralı $X(\xi)$ ile gösterelim. Böyle belirli kısıtlamalara sahip kurala "**RASLANTI DEĞİŞKENİ**" diyoruz. Dolayısıyla " $X(\cdot)$ " yada kısaca " X " rasgele değişkeni Ω domeninde çalışan ve reel ekseninde değerler alabilen bir fonksiyondur.



Şekildeki açıklandığı gibi bir eşleştirme sonucunda X reel ekseninde değerler almaktadır. Özellikle;

$$\{ \xi : X(\xi) \leq x \} \quad \text{yada kısaca} \quad \{ X \leq x \} \quad \left\{ \begin{array}{l} X : \text{raslantı değişkeni} \\ x : \text{reel sayılardaki karşılığı} \end{array} \right\}$$

özel bir olaya karşılık gelmektedir ve biz bu olaya bir olasılık değeri atamak isteriz.

Bu olasılık,

$P[X \leq x] \triangleq F_x(x)$ dir ve bu olasılığa "**OLASILIK DAĞILIM FONKSİYONU(PDF)**" deriz.

Örnek:

İki farklı paranın birlikte atılması durumunda örnek uzayı

$\Omega = \{(T, T), (Y, Y), (T, Y), (Y, T)\}$ Bu örnek uzayında farklı raslantı değişkenleri tanımlamak mümkündür.

X: Gelen tura sayısı olarak ele alındığında

$$X(T,T)=2 \quad X(Y,T)=1$$

$$X(T,Y)=1 \quad X(Y,Y)=0$$

X: Gelen yazı sayısı olarak alındığında

$$X(T,T)=0 \quad X(Y,T)=1$$

$$X(T,Y)=1 \quad X(Y,Y)=2$$

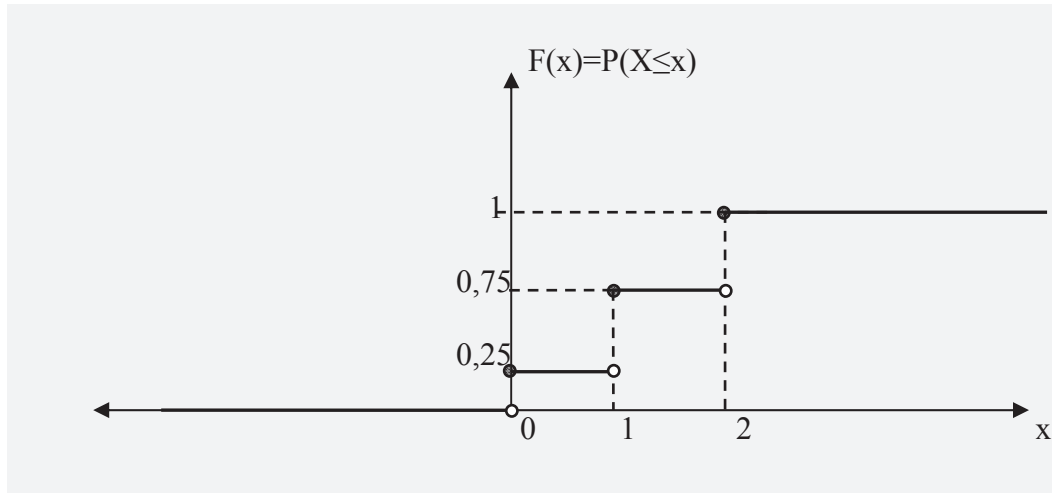
$$P(X=1) = 1/2 \quad F(0)=P(X \leq 0)$$

$$P(X=0)=1/4 \quad F(1)=P(X \leq 1)$$

$$P(X=2)=1/4$$

Bu durumda atılan iki paranın da yazı olma olasılığı $P(x=0)$, birinin tura birini yazı olma olasılığı $P(x=1)$, ve her ikisinin de yazı olma olasılığı $P(x=2)$, ile ifade ederiz.

Eğer "olasılık dağılım fonksiyonunu (PDF)" çizmeye çalışırsak şöyle bir grafik elde ederiz.



Raslantı değişkenin tanımında esas olan örnek uzayının her bir ögesi karşılığında Reel sayı ekseninde (R) bir karşılık bulabilmesidir.

Örnek:

Sınıftaki öğrenciler için

O₁: Boyu 150cm'den küçük olanlar

O₂: Boyu 169cm'den küçük olanlar

O₃: Boyu 160cm'den büyük olanlar

şeklinde tanımlanmış olayları ele alalım.

X: Bir öğrencinin boyunun uzunluğu ise

$$X(O_1)=A_1=\{x \mid x < 150\} \longrightarrow P(X < 150)$$

$$X(O_2)=A_2=\{x \mid x < 169\} \longrightarrow P(X < 169)$$

$$X(O_3)=A_3=\{x \mid x < 160\} \longrightarrow P(X < 160)$$

Bu olaylar değişken olasılıklardır.

Raslantı değişkeni reel ekseninde aldığı değerlere göre “süreksiz” ve “sürekli” raslantı değişkeni olmak üzere ikiye ayrılırlar.

Eğer X raslantı değişkeninin R deki değer kümesi sayılabilir olarak sonsuz bir küme ise X “süreksiz” bir raslantı değişkenidir.

Örneğin reel eksenindeki değer kümesi $\{x \mid x = 1,2,3,\dots\}$ olan bir raslantı değişkeni süreksizdir.

Eğer değer kümesi sayılamıyor ise o zaman X sürekli bir raslantı değişkenidir. Örneğin $\{x \mid a \leq x \leq b\}$ şeklinde ise bu raslantı değişkeni sürekli dir.

OLASILIK DAĞILIM FONKSİYONU (PDF):

$P[X = 0 \text{ veya } 1] = 1$, $P[X = 0] = \frac{3}{4}$, $P[X = 1] = \frac{1}{4}$ olan bir raslantı değişkenini ele aldığımızda $P[X \leq x]$ şeklinde yazabileceğimiz bütün olasılık değerlerini elde edebilir.

Mesela $P[X \leq 0,5] = 3/4$ olur.

Bir çok durumda her bir olasılık için tek tek olasılık fonksiyonu $P[\cdot]$ ‘yi yazmak garip olabilir. Bunun için PDF (olasılık dağılım fonksiyonunu) kullanmaya ihtiyaç duyarız.

PDF : $F_x(x) = P[X \leq x]$ şeklinde tanımlanır.

NOT:

Raslantı değişkenlerinin büyük “X” (Y,Z vs. olabilir), Bu raslantı değişkeninin aldığı değerlerin ise küçük “x” ile gösterildiğine dikkat edin bu durumda $F_x(y)$ yazmamız notasyonda herhangi bir problem oluşturmaz. $F_x(y) = P[X \leq y]$ olur.

Olasılık Dağılım Fonksiyonunun $F_x(x)$ ’in özellikleri:

- 1) $F_x(\infty) = 1$ $F_x(-\infty) = 0$
- 2) $0 \leq F_x(x) \leq 1$
- 3) $x_1 \leq x_2 \rightarrow F_x(x_1) \leq F_x(x_2)$
- 4) $P(x_1 < X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1) \geq 0$

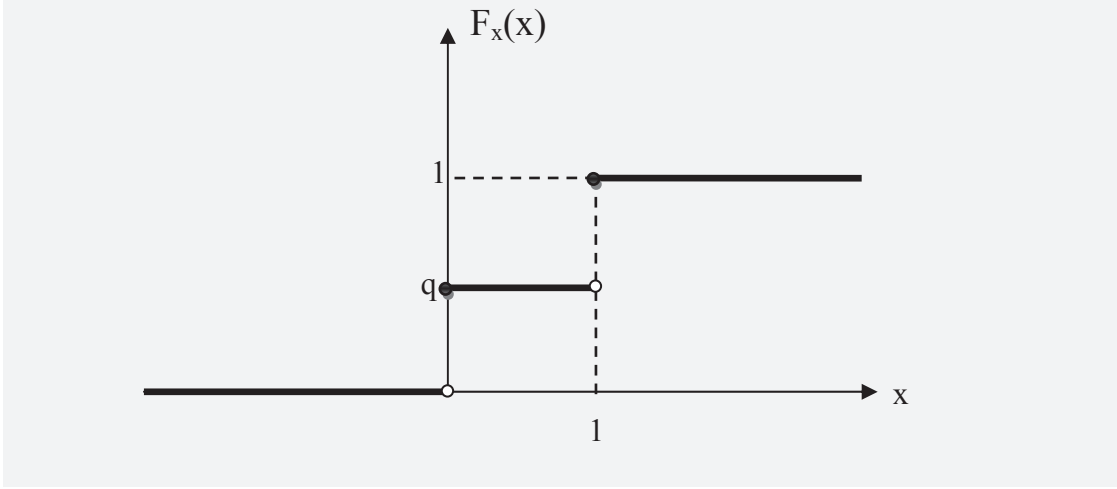
Örnek:

Bir bilgisayarın hafızasındaki bit dizisini inceleyelim. Eğer bit “1” ise $X=1$ ve “0” ise $X=0$ dir. Bitin 0 olma olasılığının “q”, 1 olma olasılığının da “1-q” olduğunu varsayalım.

Bu durumda $\Omega = \{0,1\}$ olur. Bu olasılığın dağılım fonksiyonu $F_x(x)$ ’i hesaplayalım

- i) $x < 0$: Bu durumda $\{X \leq x\} = \emptyset$ bir ve $F_x(x) = 0$

- ii) $0 \leq x < 1$: Bu durumda $\{X \leq x\} = q$ dur.
 iii) $x \geq 1$: Bu durumda $\{X \leq x\} = \Omega$ olur yani $P(X \leq 1) = 1$



Örnek:

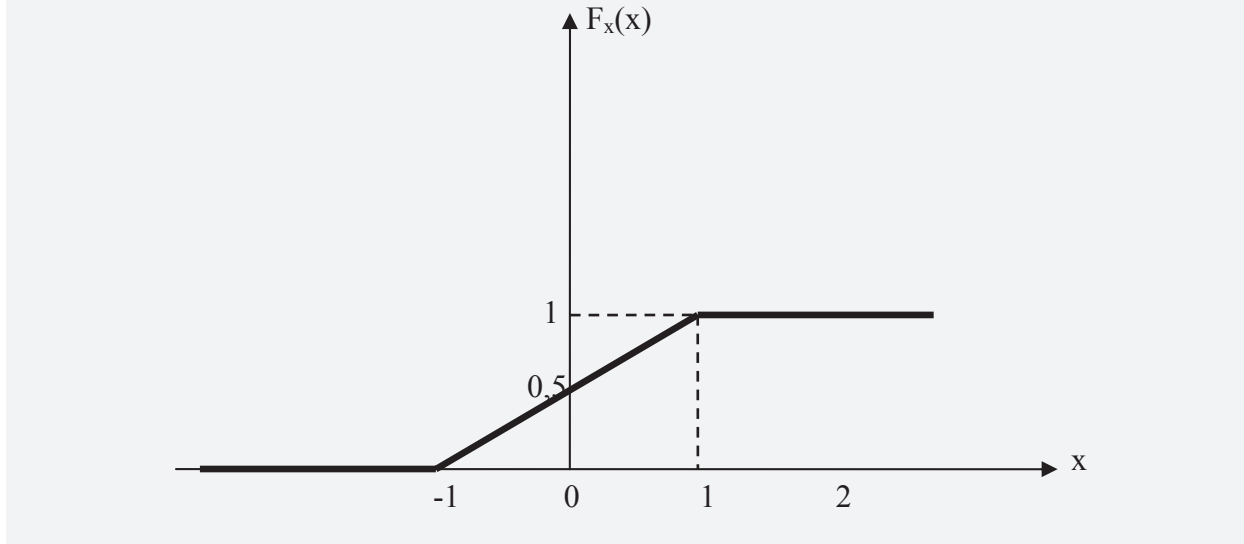
Bir raslantı değişkeni aşağıdaki olasılık dağılım fonksiyonuna sahiptir.

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & , & -\infty < x \leq -1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x & , & -1 < x < 1 \\ 1 & , & 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

a) $X = 1/4$

b) $X > 3/4$

Önce bu olasılık dağılım fonksiyonunu çizelim



“a” şikkını çözmek için $F(x^-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x - \varepsilon)$, $0 < \varepsilon$

Yani olasılık dağılım fonksiyonunun x noktasındaki soldan limitini tanımlayalım.

Burada şunu iddia ediyoruz $P\{X=x\} = F(x) - F(x^-)$

İspat:

$x_1 = x - \varepsilon$ ve $x_2 = x$ ele alalım

4. Özelliği kullanarak $P(x_1 < X \leq x_2) = F_x(x_2) - F_x(x_1)$

$$P(x - \varepsilon < X \leq x) = F_x(x) - F_x(x - \varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (F_x(x) - F_x(x - \varepsilon)) = F_x(x) - F_x(x^-) \quad \text{dir.}$$

Sürekli fonksiyonlarda fonksiyonun sağdan ve soldan limitleri fonksiyonun o noktadaki değerine eşit olduğundan $F_x(x) = F_x(x^-)$ olacağından $P(X=x)$ sürekli fonksiyonlar için “0” olur. Yani $P(X=1/4)=0$

$$b) P(X > 3/4) = 1 - P(X \leq 3/4) = 1 - F_x(3/4) = 1/8 \text{ olur.}$$

OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU (pdf)

$$f(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}$$

→ Olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Özellikleri:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dr = F(\infty) - F(-\infty) = 1$$

$$2) F(x) = \int_{-\infty}^x f(r)dr = P[X \leq x]$$

$$3) F(x_2) - F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_2} f(r)dr - \int_{-\infty}^{x_1} f(r)dr = \int_{x_1}^{x_2} f(r)dr = P[x_1 < X \leq x_2]$$

f(x)'in yorumu:

$$P[x < X \leq x + \Delta x] = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Yeterince küçük bir Δx değeri için

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(r) dr = f(x)\Delta x$$

dolayısıyla küçük Δx için $P[x < X \leq x + \Delta x] = f(x)\Delta x$ eğer $\Delta x \rightarrow 0$ 'a giderse $P[X=x] = f(x)\Delta x \rightarrow 0$ olur.

BEKLENDİK DEĞER

$$\bar{X} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Burada beklendik değer olarak nitelendirdiğimiz değer X raslantı değişkeninin ortalama değeridir.

MOMENT

$$\bar{X}^n = E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$$

\bar{X}^n e X rasgele değişkeninde görüldüğü üzere “n=1” olunca bu moment beklendik değer, “n=2” olunca **karesel beklendik değer** adını alır ve bu da bizim için önemlidir.

$$\bar{X}^2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

Karesel beklendik değer eğer rasgele değişkenimiz bir direnç üzerindeki gerilimi ifade ediyorsa direncin üzerinde harcanan güç bu karesel beklendik değerle orantılıdır.

Merkezi moment diye tanımlayacağımız momentlerde rasgele değişkenden beklendik değer çıkarıldıktan sonra elde edilen momentlerdir.

$$\overline{(X - \bar{X})^n} = E[(x - \bar{x})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^n f(x) dx$$

$n=1$ için merkezi momentin "0" olacağı açıktır.

$n=2$ için ise oldukça önemlidir. Buna "varyans" denilir.

$$\sigma^2 = \overline{(x - \bar{x})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

$$\sigma^2 = E[(x - \bar{x})^2] = E[x^2 - 2x\bar{x} + (\bar{x})^2]$$

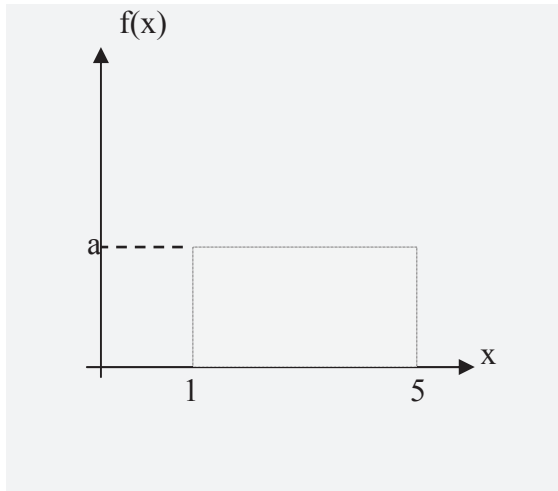
$$= E[x^2] - 2E[x]\bar{x} + (\bar{x})^2$$

$$= \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + (\bar{x})^2$$

$$= \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

$\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ ve σ değeri de standart sapma olarak adlandırılır.

Örnek:



a) Şekilde verilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun geçerli bir "pdf" olması için "a" ne olmalı?

b) $E[x]$

c) σ^2

d) σ

Çözüm:

"a" şikkının çözümü için olasılık yoğunluk fonksiyonunun 1. Özelliğini kullanacağız.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ olduğunu biliyoruz.

$$\int_1^5 a dx = 1 \Rightarrow ax|_1^5 = 1 \Rightarrow a(5-1) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \text{ olur.}$$

$$b) E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^5 x \frac{1}{4} dx = \frac{x^2}{8} \Big|_1^5 = \frac{1}{8}(25-1) = 3$$

$$c) \sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

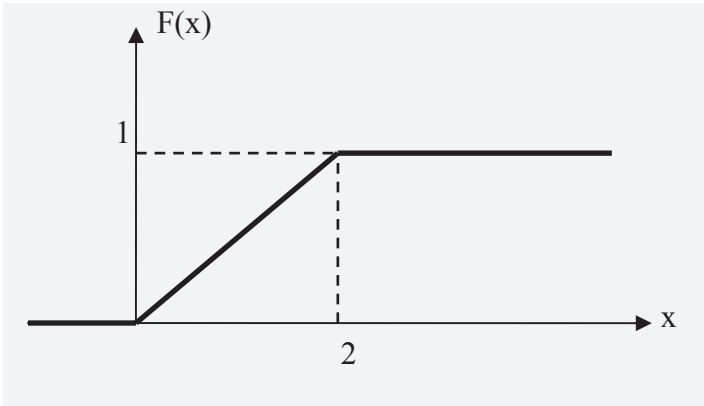
$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_1^5 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{x^3}{12} \Big|_1^5 = \frac{1}{12}(125-1) = \frac{124}{12}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{124}{12} - 3^2 = \frac{124}{12} - \frac{108}{12} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{4}{3}$$

$$d) \sigma = \sqrt{\sigma^2} \Rightarrow \sigma = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

Örnek:

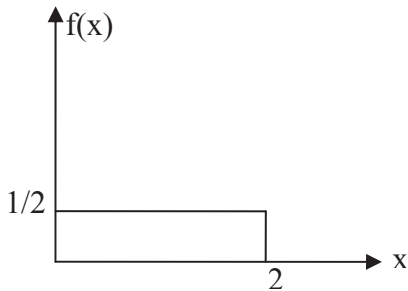
Aşağıda olasılık dağılım fonksiyonu verilen X raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu çiziniz.



$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

Dolayısıyla olasılık dağılım fonksiyonunun türevi bize olasılık yoğunluk fonksiyonunu verir.

Cevap:



DIRAC DELTA FONKSİYONU:

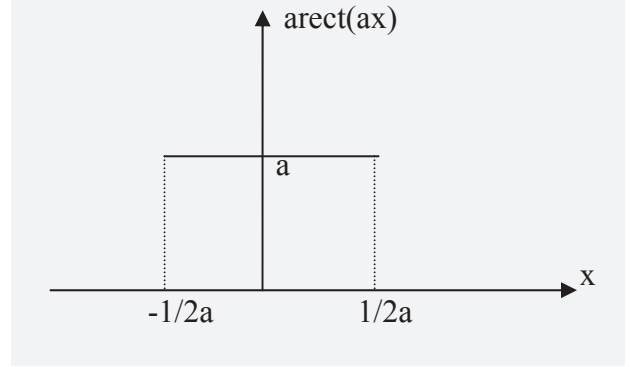
Delta fonksiyonu $\delta(x)$ genellikle $x=0$ dışındaki bütün noktalarda 0 değerini alır ve $x=0$ da ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \text{ değerini sağlayacak şekilde sonsuza uzanan bir fonksiyon dur.}$$

Diğer bir tanımda rect (dikdörtgen) fonksiyonu kullanılarak verilir.

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} a \text{ rect}(ax)$$

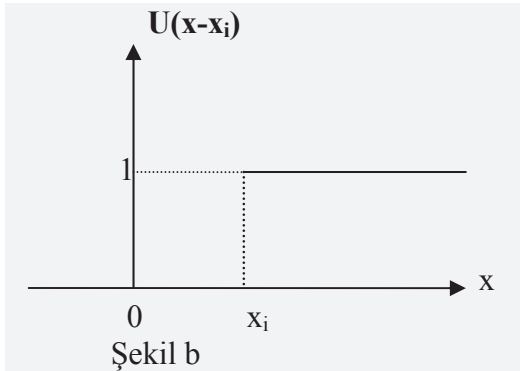
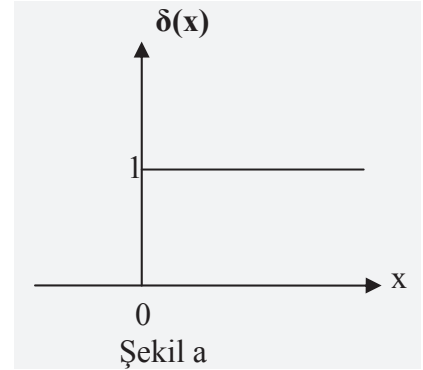
Şekilde $a \rightarrow \infty$ gittiğinde dikdörtgen genişliği azalarak 0'a gider ve yüksekliği artarak ∞ 'a gider.



$X=X_i$ noktasındaki süreksizliğin türevi:

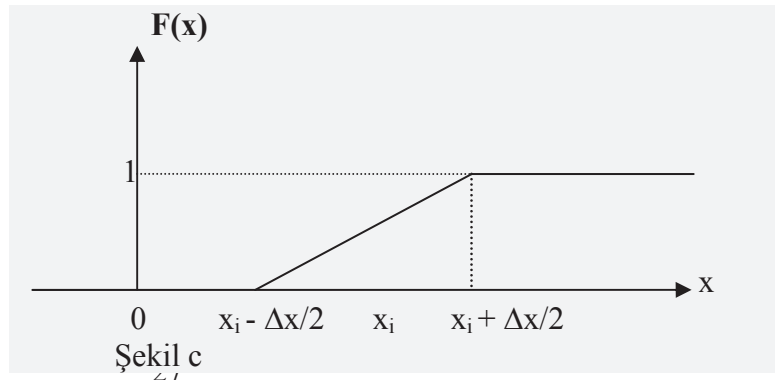
Elimizde birim basamak fonksiyonu olsun.

$$\text{birim basamak fonksiyonu} = U(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

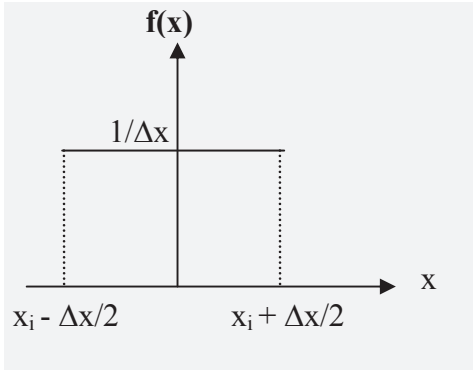


Solda gösterdiğimiz fonksiyon $U(x-x_i)$ yani birim basamak fonksiyonunun x_i kadar büyük şeklidir. (Şekil b)

Sağdaki şekilde (şekil c) ise şekil b'nin $\Delta x \rightarrow 0$ giderken bir yaklaşım gösterimidir.



Şekil c deki fonksiyonun türevini alırsak aşağıdaki grafiği elde ederiz.



$$\frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x_i} \triangleq \frac{dF(x)}{dx_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_i} \text{rect}\left[\frac{x - x_i}{\Delta x_i}\right]$$

$$\frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x_i} = \delta(x - x_i) \quad \text{olur.}$$

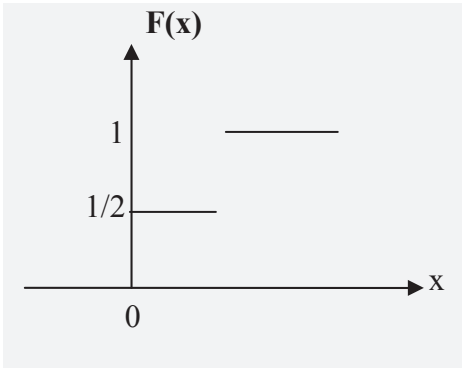
Yani $x = x_i$ noktasındaki bir süreksizliğin türevi $x = x_i$ noktasında tanımlı ve yüksekliği süreksizliği ile doğru orantılı olan bir δ fonksiyonu ile verilir.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_x(x_i) \text{ olduğunu hatırlayarak aynı şekilde}$$

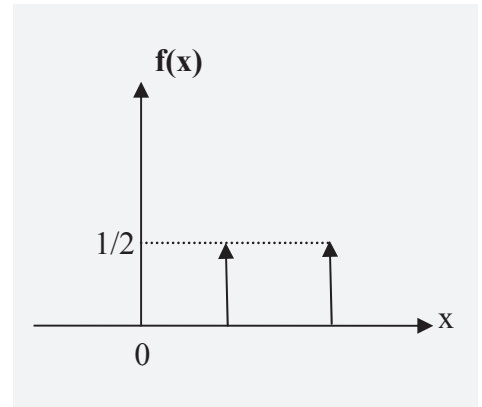
$$F(x) = \sum_i P_x(x_i) U(x - x_i) \text{ şeklinde yazabiliriz}$$

$$\text{dolayısıyla } f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \sum_i P_x(x_i) \delta(x - x_i) \text{ olur.}$$

Örnek:



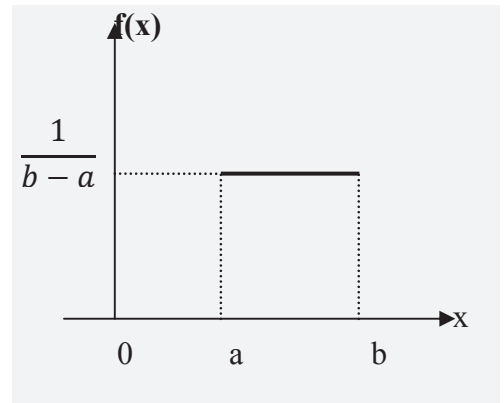
→PDF ise



Sık Kullanılan Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları:

1) Uniform pdf (düzgün)

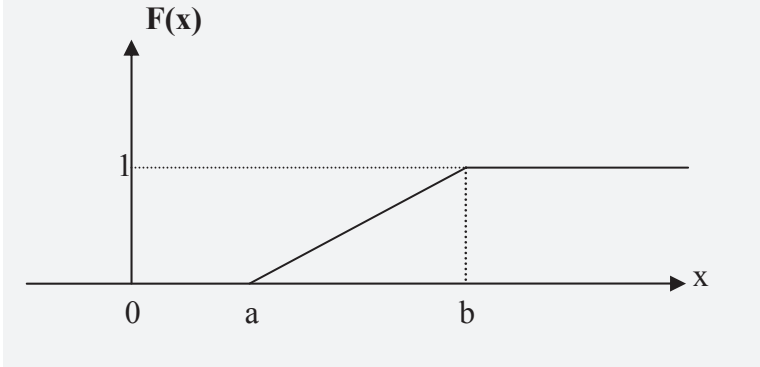
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$



Bu dağılım daha önceden bilgi sahibi

olmadığımız durumda belli aralıklarda olabilecek olayların eşit şansa olabileceğini kabul etmemize karşılık gelen pdf dir.

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun PDF'sini çizecek olursak



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

ortalama değer $E[x] = \mu = \frac{a+b}{2}$ olur.

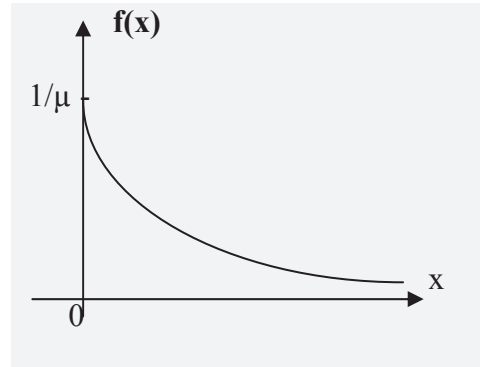
$$\text{varyansı } \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2) Exponansiyel (Üstsel dağılım) ($\mu > 0$)

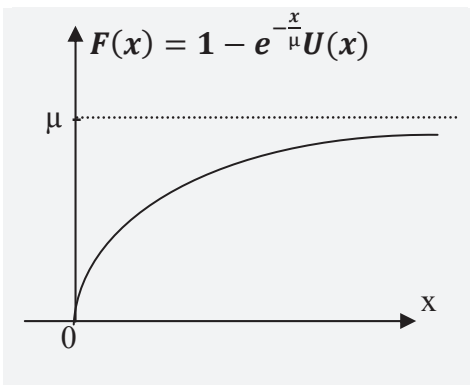
$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} U(x)$$

Ortalama değer = μ

Varyans $\sigma^2 = \mu^2$

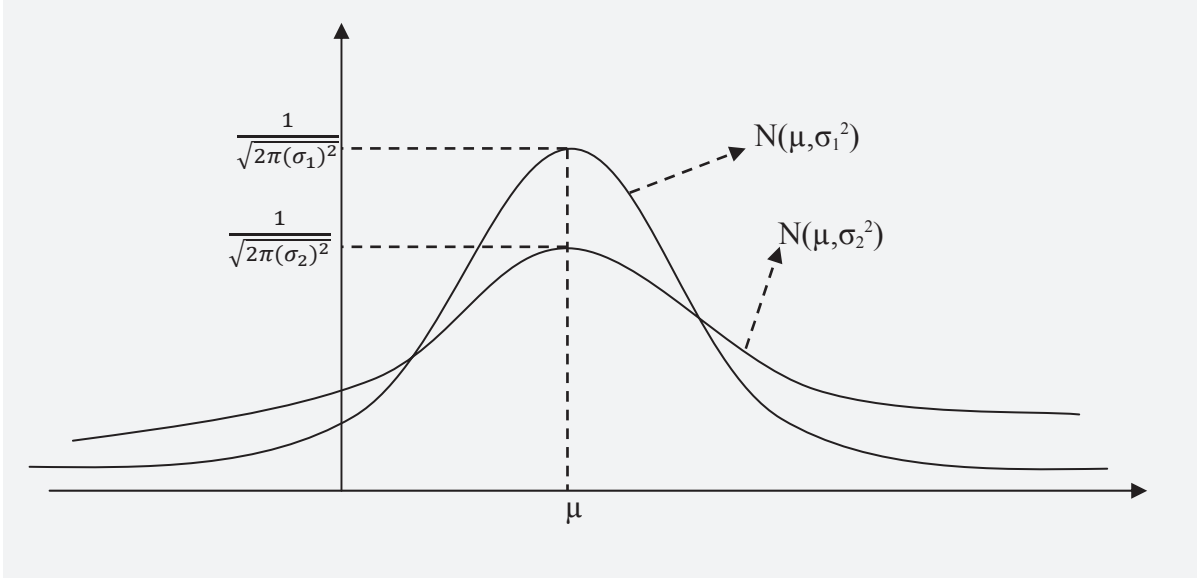


Üstsel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunun PDF'sini çizersek



3) Normal (Gaussian)pdf

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Ortalama değer $E[x]=\mu$

Varyans = σ^2

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonunun PDF'si ise

$$F(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Bu integrali almak zor bunun için "erf" fonksiyonundan yaklaşım yapacağız.

$$\operatorname{erf}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$P(a < X \leq b) = \operatorname{erf}\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

erf fonksiyonunun birkaç özelliği:

1) $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$

2) $P(X \leq x) = \frac{1}{2} + \operatorname{erf}(x)$

3) $P(X > x) = \frac{1}{2} - \operatorname{erf}(x)$

$$4) P(X > -x) = \frac{1}{2} + \text{erf}(x)$$

$$5) F(-x < X \leq x) = 2\text{erf}(x)$$

$$6) P(|X| > x) = 1 - 2\text{erf}(x)$$

Örnek:

$N(0,4)$ gaussian bir dağılım için $P(2 < X \leq 4) = ?$

Cevap:

$$\begin{aligned} P(2 < X \leq 4) &= \text{erf}\left(\frac{4-0}{2}\right) - \text{erf}\left(\frac{2-0}{2}\right) \\ &= \text{erf}(2) - \text{erf}(1) \\ &= 0,477 - 0,341 \\ &= 0,136 \text{ olur.} \end{aligned}$$

Örnek:

Sınıf mevcudunun 66 kişi olduğunu düşünelim $\mu=30$ ve $\sigma=20$ bu sınıfta 20 ile 40 arasında not alan kaç kişi vardır?

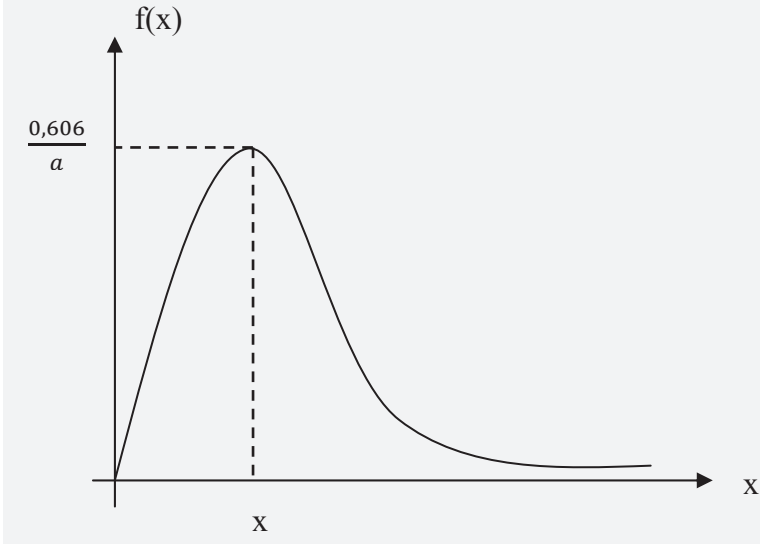
Cevap:

$$\begin{aligned} P(20 < X \leq 40) &= \text{erf}\left(\frac{40-30}{20}\right) - \text{erf}\left(\frac{20-30}{20}\right) \\ &= \text{erf}(0,5) - \text{erf}(-0,5) \\ &= 2\text{erf}(0,5) \\ &= 2(0,191) \\ &= 0,382 \end{aligned}$$

$66 \cdot 0,382 = 25,08 \approx 25$ kişi 20 ile 40 arasında not alır.

4) **Rayleigh** ($a > 0$) ve ($n \geq 0$)

$$f(x) = \frac{x}{a^2} e^{\frac{-x^2}{2a^2}} U(x)$$



Ortalama değer $\mu = a \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Varyans $\sigma^2 = \left(\frac{4-\pi}{2}\right)a^2$

Bu pdf haberleşmede gecikmeli (fading) kanalın modellenmesinde kullanılır.

BELIRSI 2 INTEGRAL
 TABLOSU

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\cos ax + ax \sin ax)$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \sin ax + 2 \cos ax - a^2 x^2 \cos ax)$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{1}{a^3}(2ax \cos ax - 2 \sin ax + a^2 x^2 \sin ax)$$

$$\int \sin ax \sin bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\left[\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \right] \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int x^2 e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^3}(a^2 x^2 - 2ax + 2)$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2)$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx$$

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax$$

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad \int \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

$$\int x \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2}(\sin ax - ax \cos ax)$$

5 - EK - 1

33

2.4 Probability Density Function (pdf)

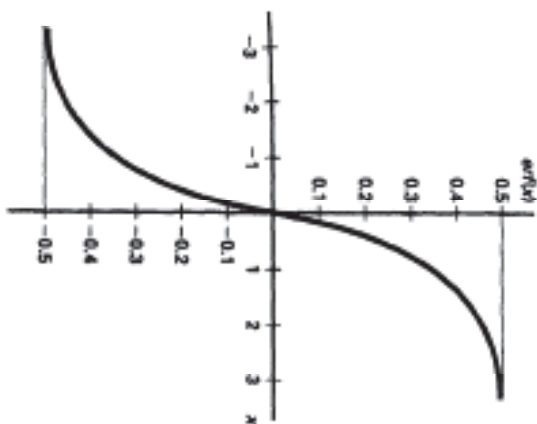


Figure 2.4-2 erf(x) versus x.

Table 2.4-1

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

x	erf(x)	x	erf(x)
0.05	0.01994	2.65	0.47981
0.10	0.03983	2.10	0.48213
0.15	0.05962	2.15	0.48421
0.20	0.07926	2.20	0.48609
0.25	0.09871	2.25	0.48777
0.30	0.11791	2.30	0.48927
0.35	0.13683	2.35	0.49060
0.40	0.15542	2.40	0.49179
0.45	0.17364	2.45	0.49285
0.50	0.19146	2.50	0.49378
0.55	0.20884	2.55	0.49460
0.60	0.22575	2.60	0.49533
0.65	0.24213	2.65	0.49596
0.70	0.25803	2.70	0.49652
0.75	0.27337	2.75	0.49701
0.80	0.28814	2.80	0.49743
0.85	0.30233	2.85	0.49780
0.90	0.31594	2.90	0.49812
0.95	0.32894	2.95	0.49840
1.00	0.34134	3.00	0.49864
1.05	0.35314	3.05	0.49884
1.10	0.36433	3.10	0.49902
1.15	0.37492	3.15	0.49917
1.20	0.38492	3.20	0.49930
1.25	0.39434	3.25	0.49941
1.30	0.40319	3.30	0.49951
1.35	0.41149	3.35	0.49958
1.40	0.41924	3.40	0.49965
1.45	0.42646	3.45	0.49971
1.50	0.43319	3.50	0.49976
1.55	0.43942	3.55	0.49980
1.60	0.44519	3.60	0.49983
1.65	0.45052	3.65	0.49986
1.70	0.45543	3.70	0.49988
1.75	0.45993	3.75	0.49990
1.80	0.46406	3.80	0.49992
1.85	0.46783	3.85	0.49993
1.90	0.47127	3.90	0.49994
1.95	0.47440	3.95	0.49995
2.00	0.47724	4.00	0.49996

But $\text{erf}(-x) = -\text{erf}(x)$ (deduced from Equation 2.4-8). Hence

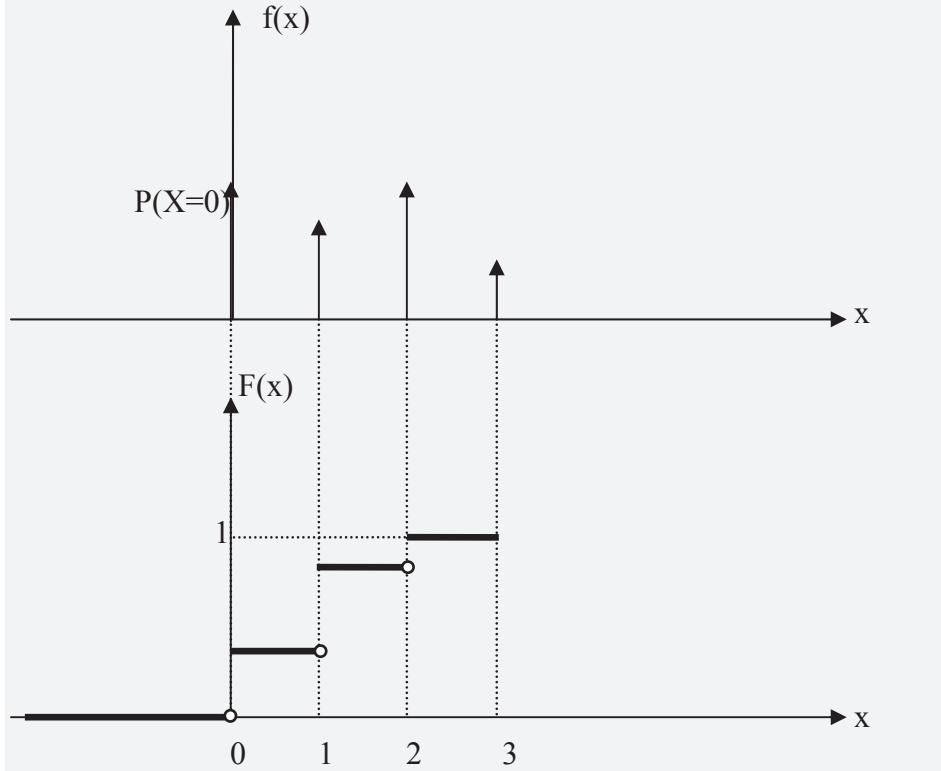
5) *Binom olasılık yoğunluk fonksiyonu* ($n > m$):

$$P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{ve} \quad p + q = 1 \quad \text{olmak üzere.}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot \delta(x - k)$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^m \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad m \leq x < m + 1$$

Olasılık yoğunluk grafiğini çizersek



"n" eğer çok büyükse $\begin{cases} \text{Ortalama değer} & \mu = n \cdot p \\ \text{Standart sapması} & \sigma = \sqrt{npq} \end{cases}$

6) *Poisson* ($a > 0$):

$$P\{X = k\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

buna göre:

$$f(x) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \delta(x - k)$$

$$F(x) = e^{-a} \sum_{k=0}^m \frac{a^k}{k!} \quad m \leq x < m + 1$$

Şimdi bunların nasıl elde edildiğine bakalım.

İspat:

$$\Rightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{ve} \quad p + q = 1$$

$$\Rightarrow n \gg 1, \quad p \ll 1, \quad n.p = a \text{ olsun}$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots (n-k+1) \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n^k}{n^k} a^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

paydadaki n sonsuza giderse ($n \rightarrow \infty$)

Taylor serisinden

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} a^k e^{-a}$$

$$\Rightarrow e^{-a} \frac{a^k}{k!} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Örnek:

Bir bilgisayarda 10 bin tane elektronik eleman vardır. Her bir eleman diğerinden bağımsız bir yılda bozulma olasılığı ($p=10^{-4}$) olarak veriliyor. Bilgisayarın yıl sonunda çalışıyor olma olasılığı nedir? Bir eleman bozulduğunda bilgisayarında bozulduğu kabul ediliyor.

Cevap:

$$P=10^{-4} \quad n=10000 \quad k=0 \quad \text{ve} \quad a = n.p = 1 \text{ olduğunu biliyoruz.}$$

$$e^{-a} \frac{a^k}{k!} = \frac{1^0}{0!} e^{-1} = 0,368 \quad \text{olur.}$$

$$a = \lambda\tau$$

λ : birim zamandaki olayların sayısı

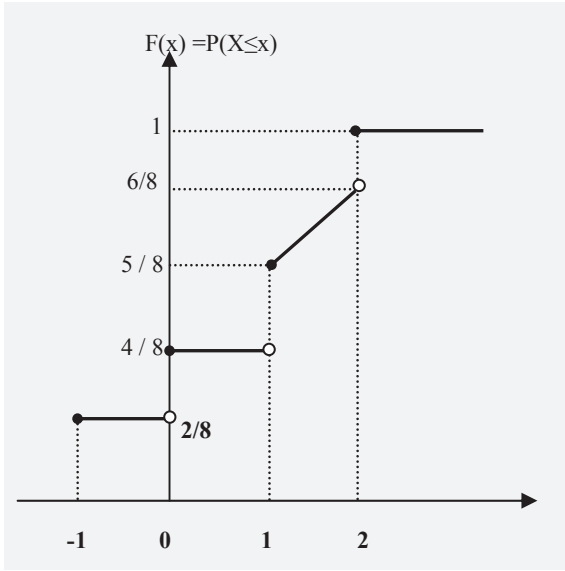
τ : aralığın uzunluğu $(t, t + \tau)$

$$P(k; t, t + \tau) = \frac{(\lambda\tau)^k}{k!} e^{-\lambda\tau}$$

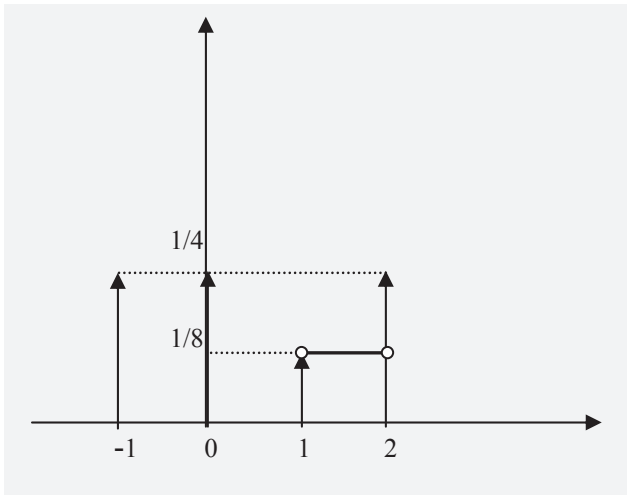
Trafik modellemelerde çokca kullanılan yoğunluk ifadesi

Örnek:

Şeklinde verilen bir pdf için PDF yi bulunuz.



Cevap:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta(x+1)}{4} + \frac{\delta(x)}{4} + \frac{\delta(x-1)}{8} + \frac{\delta(x-2)}{4} \right) dx + \int_1^2 \frac{1}{8} dx$$

toplamın integrali integrallerin toplamına eşittir. Dolayısıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x+1)}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x+1) dx = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x)}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-1)}{8} dx = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-1) dx = \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(x-2)}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-2) dx = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{8} dx = \frac{1}{8}$$

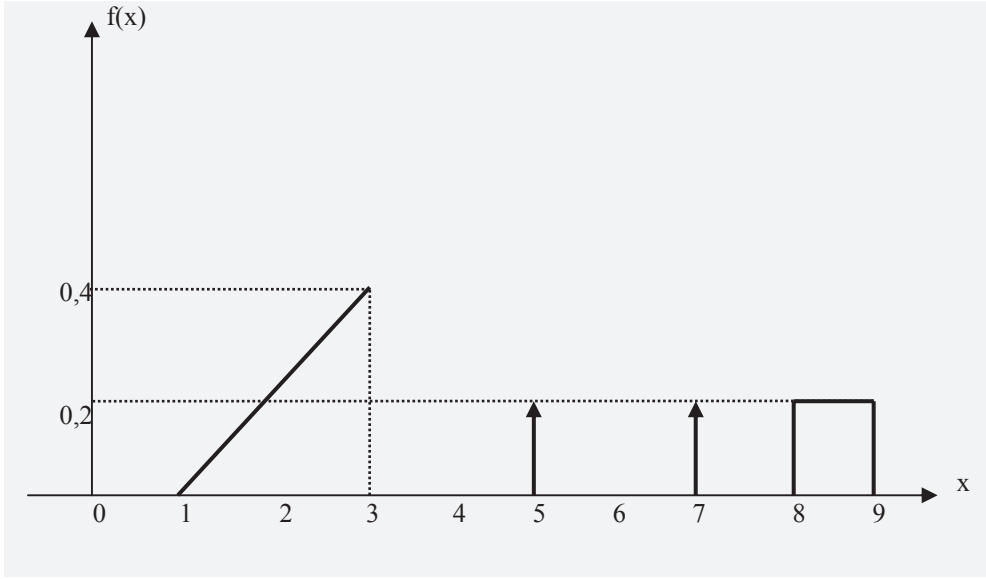
Sonuçların hepsini toplarsak sonucun 1 olması gerekir.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Eğer $F(x) = P(-1 \leq x \leq 1)$ sorulmuş olsaydı cevap $1/4 + 1/4 + 1/8 = 5/8$ olacaktı.

Örnek:

- pdf grafiği verilen fonksiyonun PDF 'sini çiziniz
- $P(4 < x \leq 8,5)$ değerini bulunuz.



Cevap:

a) Her bir aralık için ayrı ayrı hesaplama yaparsak

1 ≤ x ≤ 3 Aralığı için F(x)'i yazacak olursak.

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 f(r)dr + \int_1^x 0,2(r-1)dr$$

$\int_{-\infty}^1 f(r)dr$ integrali 0 olur çünkü bu aralıkta $(-\infty, 1)$ $f(r) = 0$ dir.

Dolayısıyla sadece ikinci integral kalır.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x 0,2(r-1)dr = 0,2 \left(\frac{r^2}{2} - r \right) \Big|_1^x \\ &= 0,2 \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \\ &= 0,2 \left[\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} \right] \text{ şeklinde 2. dereceden bir denklem oluşur.} \end{aligned}$$

3 < x < 5 Aralığı için F(x)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(r)dr = \int_{-\infty}^1 0dr + \int_1^3 0,2\delta(r-1)dr + \int_3^x 0dr \\ &= 0,2 \left[\frac{r^2}{2} - r \right] \Big|_1^3 = 0,2 \left[\left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = 0,4 \text{ olur} \end{aligned}$$

5 < x ≤ 7 Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(r)dr = \int_{-\infty}^1 0dr + \int_1^3 0,2\delta(r-1)dr + \int_3^{\infty} 0dr + \int_5^7 0,2\delta(r-5)dr$$

$$F(x) = 0,4 + 0,2 = 0,6 \text{ olur.}$$

7 < x ≤ 8 Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0dr + \int_1^3 0,2\delta(r-1)dr + \int_3^{\infty} 0dr + \int_5^7 0,2\delta(r-5)dr + \int_7^8 0,2\delta(r-7)dr$$

$$F(x) = 0,4 + 0,2 + 0,2 = 0,8 \text{ olur.}$$

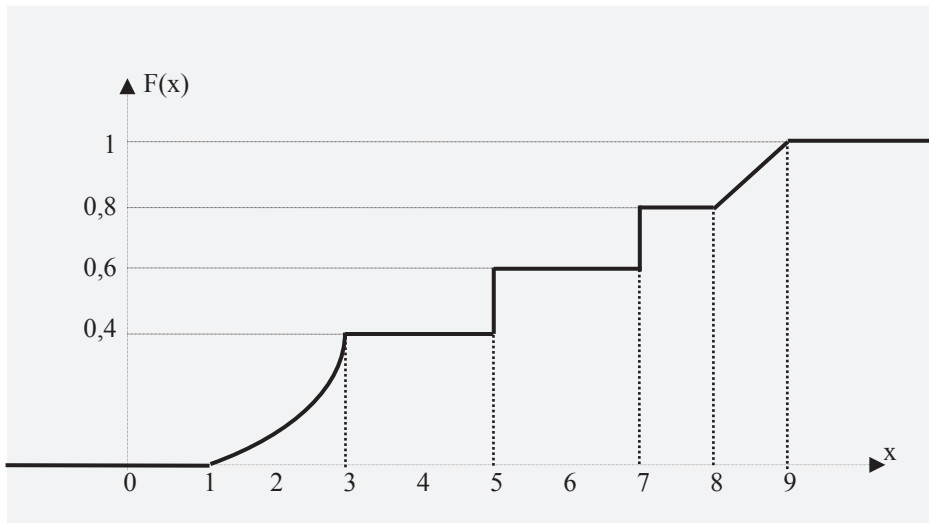
8 < x ≤ 9 Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(r)dr = 0,8 + \int_8^x 0,2dr = 0,8 + 0,2x \text{ olur.}$$

9 < x < ∞ Aralığı için F(x)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(r)dr = 0,8 + \int_8^9 0,2dr = 0,8 + 0,2 = 1 \text{ olur.}$$

Her aralık için hesaplama yaptık bunları çizelim çizilen grafik bizden istenen PDF olacaktır.



b)

$$P(4 < x \leq 8,5) = \int_4^{8,5} f(x)dx = \int_4^8 0,2[\delta(x-5) + \delta(x-8)]dx + \int_8^{8,5} 0,2dx$$

$$= 0,4 + 0,2x|_8^{8,5} = 0,5$$

Yada

$$P(4 < x \leq 8,5) = F(8,5) - F(4) = 0,9 - 0,4 = 0,5 \text{ olur.}$$

Koşullu Yoğunluklar Ve Dağılımlar:

“Ω” Evrensel kümesine ait bütün ξ elemanlarını içeren bir C olayını ve bu Ω kümesinin elemanlarını reel eksene atayan bir X raslantı değişkeni ele alalım. Bu durumda yine bu evrensel kümenin alt kümesi olan bir B kümesi tanımlayalım

$$\{ \xi : X(\xi) \leq x \} , \{ \xi : \xi \in B \}$$

B olayına bağlı şartlı dağılım

$$F(x|B) \triangleq \frac{P[C]}{P[B]} = \frac{P[X \leq x, B]}{P[B]} \quad \text{şeklinde tanımlanır.}$$

Burada $P[X \leq x, B] \dots \dots \dots \{ X \leq x \}$ ve B olayının bileşik olasılığıdır. Eğer $x \rightarrow \infty$ $\{ X \leq \infty \}$ kesin olaya denk olur ve $F(\infty, B) = 1$ olur.

$F(x|B)$ Normal bir dağılım fonksiyonunun bütün özelliklerine sahiptir.

Koşullu yoğunluk fonksiyonu da aynı şekilde

$$f(x|B) \triangleq \frac{dF(x|B)}{dx} \quad \text{dir.}$$

Örnek:

B olayını $B \triangleq \{ X \leq 10 \}$ şeklinde tanımlayalım ve $F(x|B)$ 'yi hesaplayalım.

i) $x \geq 10$ için $\{ X \leq 10 \}$ olayı $\{ X \leq x \}$ olayının bir alt kümesidir. Dolayısıyla

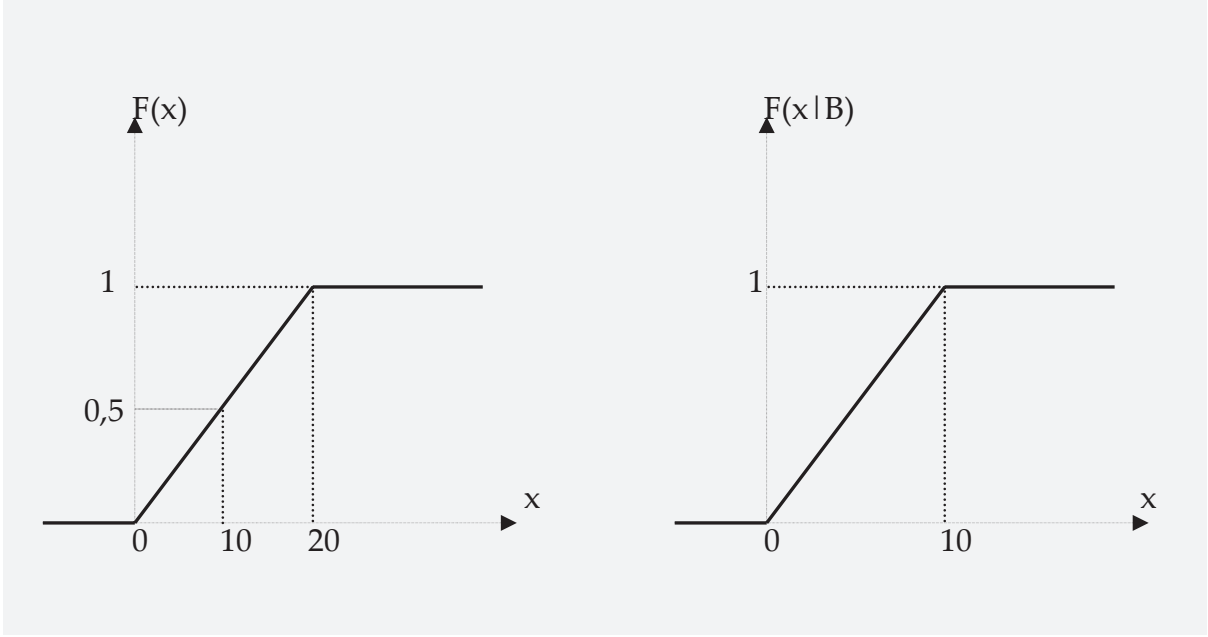
$$P[X \leq 10, X \leq x] = P[X \leq 10] \quad \text{olur.}$$

$$F[x|B] = \frac{P[X \leq x, X \leq 10]}{P[X \leq 10]} = 1$$

ii) $x \leq 10$ için $\{ X \leq x \}$ olayı $\{ X \leq 10 \}$ olayının alt kümesidir dolayısıyla

$$P[X \leq 10, X \leq x] = P[X \leq x]$$

$$F(x|B) = \frac{P[X \leq x]}{P[X \leq 10]}$$

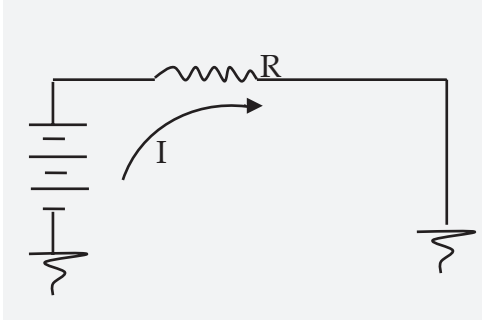


BİR RASLANTI DEĞİŞKENİNİN FONKSİYONLARI

Mühendislik uygulamalarında klasik bir problem; bir sistemin girişine uygulanan giriş için çıkışın hesaplanmasıdır. Böylesi bir sistemin girişi bir raslantı değişkeni ise çıkışı da genellikle bir raslantı değişkeni olacaktır. Bu durumda eğer giriş raslantı değişkenleri için PDF veya pdf ifadeleri de biliniyorsa sistemin çıkışındaki raslantı değişkeni için PDF veya pdf hesaplanabilir.

Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Bir direnç (R) elemanı üzerinden akan akım (I) büyüklüğü w ile ifade edilen miktarda bir enerji oluşturmaktadır.

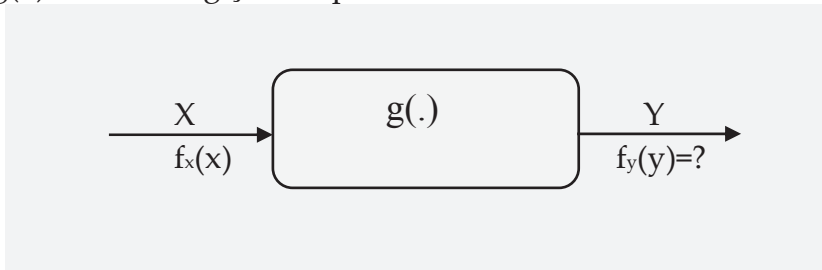


$$W \triangleq W(I) = I^2 R$$

Burada W veya W(.) bazen de W(I) ifadesi ile tanımlanan ve fonksiyon olarak adlandırılan büyüklük her I değeri için oluşan enerjiyi belirler. Bu durumda, eğer I bir raslantı değişkeni olarak tanımlanmış $W=I^2R$ şeklinde tanımlı büyüklük

yeni bir raslantı değişkeni oluşturmaktadır. O zaman çözülmesi gereken soru:

Verilen bir kuralı (fonksiyon) ve pdf'i $f_x(x)$ tanımlanan X raslantı değişkeni için, yeni $Y=g(x)$ raslantı değişkeninin pdf'i ne olacaktır?



$Y=g(x)$ tipi bir problem çözümü;

Tek bir raslantı değişkeninin (fonksiyonu):

$X(0,1)$ aralığında tanımlı uniform bir raslantı değişkeni ifade edilsin. Ve $Y=2X+3$ yeni raslantı değişkeni $F_y(y)=?$

$$\{Y \leq y\} = \{2X + 3 \leq y\} = \{X \leq 1/2(y - 3)\} \quad \text{olacaktır.}$$

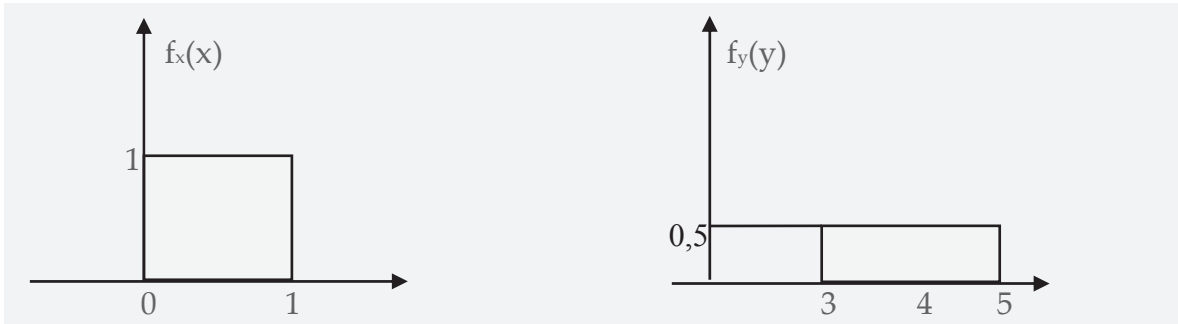
Dolayısıyla

$$F_y(y) = F_x\left(\frac{y-3}{2}\right) \quad \text{ifadesiyle kolaylıkla eldeedilebilir.}$$

Buradan hareketle,

Y 'nin pdf'si için:

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} [F_y(y)] = \frac{d}{dy} \left[F_x\left(\frac{y-3}{2}\right) \right] \quad \text{olur.}$$



$$u = \frac{y-3}{2} \quad \text{olmak üzere} \quad f_y(y) = \frac{d}{dy} \left[F_x\left(\frac{y-3}{2}\right) \right] = \frac{d}{du} [F_x(u)] \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{ise}$$

$$f_y(y) = f_x(u) \cdot \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f_y(y) = f_x\left(\frac{y-3}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{olur.}$$

Genelleme

$Y=aX+b$ şeklinde pdf'i $f_x(x)$ olan sürekli bir X raslantı değişkeni

$a > 0$ için

$$\{Y \leq y\} = \{aX + b \leq y\} = \left\{ X \leq \frac{y-b}{a} \right\} \Rightarrow$$
$$\left| F_y(y) = F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \right| \quad \text{ve} \quad \left| f_y(y) = \frac{1}{a} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \right| \quad \text{olacaktır.}$$

$a < 0$ için

$$\{Y \leq y\} = \{aX + b \leq y\} = \left\{ X \geq \frac{y-b}{a} \right\} \quad \text{olur.}$$

$\left\{X < \frac{y-b}{a}\right\}$ ve $\left\{X \geq \frac{y-b}{a}\right\}$ olay kümeleri ayrık ve bileşkeleri Ω örnek uzayını

Oluşturdukları için

$$P\left[X < \frac{y-b}{a}\right] + P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 \dots\dots\dots I \quad \text{olacaktır.}$$

Sürekli bir raslantı değişkeni için

$$P\left[X < \frac{y-b}{a}\right] = P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] \dots\dots\dots II$$

Bizim için gerekli değil ama doğru

$$P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = P\left[X > \frac{y-b}{a}\right] \text{ olur}$$

I ve II den

$$P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] + P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 \quad \Rightarrow$$

$$P\left[X \geq \frac{y-b}{a}\right] = 1 - P\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] \quad \Rightarrow$$

$$F_y(y) = 1 - F_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \text{ve}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{|a|} f_x\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad a \neq 0$$

Bileşke fonksiyon:

$f(x)$ ve $g(x)$ verilsin $f(g(x))$ ifadesi $f \circ g(x)$ olarak gösterilir. Ve buna bileşke fonksiyon adı verilir.

$$\frac{d}{dx} f \circ g(x) = \frac{df(g(x))}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{y=g(x)} \frac{d}{dx} g(x)$$

Mesela:

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{ve} \quad g(x) = 3x + 1 \text{ olsun}$$

$$f(g(x)) = (3x + 1)^2 + 1$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = 6(3x + 1) \quad \text{veya}$$

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = 2(3x + 1) \cdot 3 \text{ olarak yazılabilir.}$$

Lineer Olmayan Bir fonksiyon örneği:

PDF'i $F_x(x)$ olarak tanımlı sürekli bir raslantı değişkeni için $Y=X^2$ olsun.

$$P\{Y \leq y\} = P\{x^2 \leq y\} = P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

Bu durumda

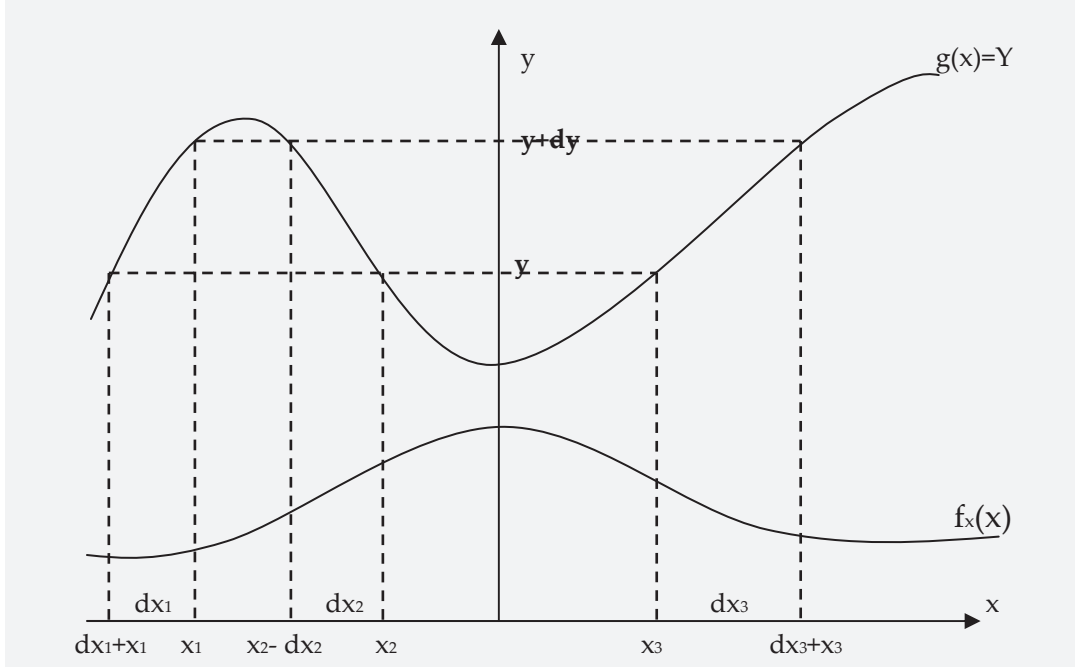
$$P\{Y \leq y\} = F_y(y) = F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y}) \text{ olur.} \quad X \text{ sürekli bir rasl. değ.}$$

$y > 0$ için;

$$f_y(y) = \frac{d}{dy} F_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(\sqrt{y}) - \frac{-1}{2\sqrt{y}} f_x(-\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(-\sqrt{y})$$

$y \leq 0$ için → tanımsız.



$$P\{y < Y \leq y + dy\} = f_y(y)|dy|$$

$$= P\{x_1 < X \leq x_1 + dx_1\} + P\{x_2 - dx_2 < X \leq x_2\} + P\{x_3 < X \leq x_3 + dx_3\}$$

$$\Rightarrow f_x(x_1)dx_1 + f_x(x_2)dx_2 + f_x(x_3)dx_3 = f_y(y)dy$$

$$f_y(y) = f_x(x_1) \frac{dx_1}{dy} + f_x(x_2) \frac{dx_2}{dy} + f_x(x_3) \frac{dx_3}{dy}$$

$$y = g(x) = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_1} = \frac{g'(x)}{1} \Big|_{x=x_1} = \frac{dy}{dx_1} = g'(x_1) = \frac{1}{g'(x_1)}$$

$$\Rightarrow f_y(y) = \frac{f_x(x_1)}{g'(x_1)} + \frac{f_x(x_2)}{g'(x_2)} + \frac{f_x(x_3)}{g'(x_3)}$$

$$\text{genel olarak } \rightarrow f_y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad , \quad g(x_i) \neq 0$$

Y=g(x) fonksiyonu için genel çözüm:

pdf si $f_x(x)$ olan türevi alınabilir reel raslantı değişkeninin fonksiyonu $g(x)$ verilsin

$Y=g(x)$ için pdf=?

$\{y < Y \leq y + dy\}$ kümesi kesişimleri boş küme olan $\{E_i\}$ kümelerinin bileşkesi olarak da yazılabilir. Burada eğer

$Y=g(x)$ fonksiyonunun n tane reel kökü $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ise

$$E_i = \{x_i - |dx_i| < X < x_i\}, \quad g'(x_i) < 0$$

$$E_i = \{x_i < X < x_i + |dx_i|\}, \quad g'(x_i) > 0$$

Şeklinde tanımlanan kümeleri göz önüne alalım Her iki durumda da pdf tanımından $P[E_i] = f_x(x_i) \cdot |dx_i|$ olarak yazılır.

Sonuç olarak

$$P[y < Y \leq y + dy] = f_y(y) \cdot |dy| \\ = \sum_{i=1}^n f_x(x_i) \cdot |dx_i| \quad \text{olur.}$$

Veya bu eşitliğin her iki tarafını $|dy|$ ile böersek,

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^n f_x(x_i) \cdot \left| \frac{dx_i}{dy} \right| = \sum_{i=1}^n f_x(x_i) \cdot \left| \frac{dy}{dx_i} \right|^{-1} \quad \text{olur.}$$

Bu durumda $y=g(x)$ ifadesinin kökleri için $dy/dx_i = g'(x)$ olarak

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad \text{şeklinde genel bir fonksiyon elde edilir}$$

$$x_i = x_i(y), \quad g'(x_i) \neq 0$$

Bu elde edilen ifade $g(x)$ ifadesinin birçok kökü olduğundan bu tarz problemlerin çözümünü kolaylaştıran bir yöntemdir. Eğer verilen bir y için $Y=g(x)$ ifadesinin kökü yoksa $f_y(y)=0$ olacaktır.

Örnek:

$X:[0,1]$ uniform dağılıma uyuyor. $Y=2X+3$ şeklinde tanımlanan fonksiyon için

$$f_y(y) = ?$$

$$g(x) = 2x+3 \quad 2x+3 = y \rightarrow x = (y-3)/2$$

$$g'(x) = 2$$

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^1 \frac{f_x\left(\frac{y-3}{2}\right)}{2} = \frac{f_x\left(\frac{y-3}{2}\right)}{2} \quad \text{olur.}$$

Y=g(x) in beklendik değeri ve standart sapması

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_x(x) dx \quad \text{ve} \quad \sigma^2 = E[x^2] - (E[x])^2 \quad \text{olduğunu biliyoruz.}$$

$Y = g(x)$ için bu hesaplamaları yaparsak

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx \quad \text{ve}$$

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x)]^2 f_x(x) dx \quad \Rightarrow \quad \sigma_y^2 = E[y^2] - (E[y])^2 \quad \text{olur.}$$

İspat:

$Y=ax+b$ şeklinde bir fonksiyon verilmiş olsun.

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} ax f_x(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b f_x(x) dx$$

$$= aE[x] + b$$

$$E[y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [ax + b]^2 f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 x^2 f_x(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} b^2 f_x(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2abx f_x(x) dx$$

$$= a^2 \overline{x^2} + 2ab\bar{x} + b^2 \quad \text{standart sapmayı yazarsak}$$

$$\sigma^2 = a^2 \overline{x^2} + 2ab\bar{x} + b^2 - a^2 \bar{x}^2 - b^2 - 2ab\bar{x}$$

$$= a^2 \{E[x^2] - (E[x])^2\}$$

σ_x^2 olduğunu öğrenmiştik. Dolayısıyla $\sigma^2 = a^2 \sigma_x^2$ olur.

Örnek:

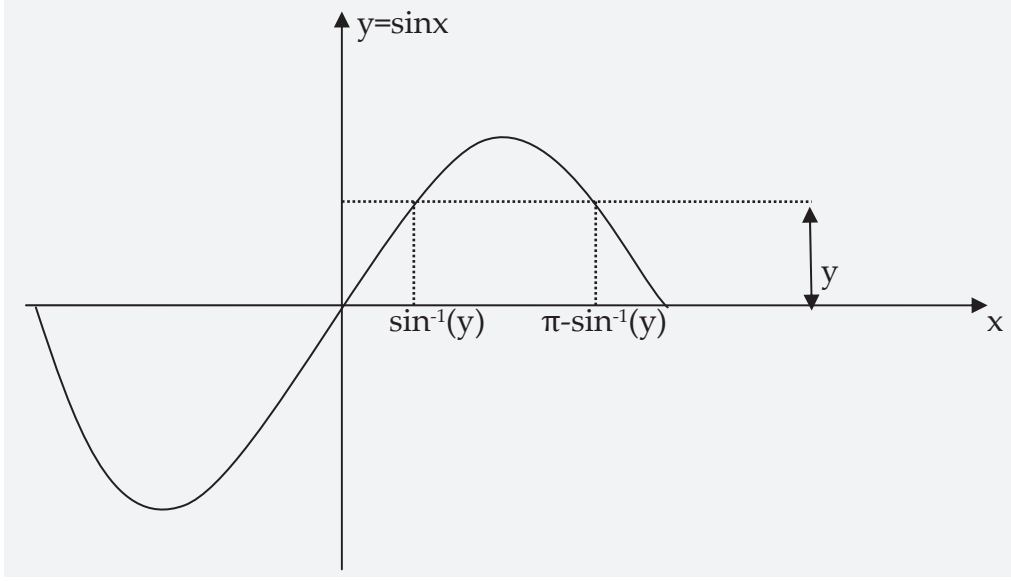
pdf'i hesaplanacak fonksiyon uygulamalarında $Y = \sin(x)$ türü bir fonksiyon klasik bir uygulamadır. Burada X rast. değ.'nin

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{diğer.} \end{cases}$$

Şeklinde Uniform dağıldığı kabul edilecektir.

Çözüm I:

(Klasik yaklaşımla çözersek) önce bu fonksiyonunun şeklini çizelim.



$P\{Y \leq y\} = ?$ Bunun için $\{Y \leq y\} = ?$

a) $0 \leq y \leq 1$ için

$$\{Y \leq y\} = \{\sin(x) \leq y\} = \{\pi - \sin^{-1}(y) < x \leq \pi\} \cup \{0 < x \leq \sin^{-1}(y)\}$$

$$F_y(y) = F_x(\pi) - F_x(\pi - \sin^{-1}(y)) + F(\sin^{-1}(y)) - F(0)$$

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \frac{dF_y(y)}{dy} = f_x(\pi - \sin^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f_x(\sin^{-1}(y)) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad 0 \leq y \leq 1 \text{ aralığı için.} \end{aligned}$$

b) $-1 \leq y \leq 0$ için

Benzer işlemler yapılırsa sonuç şu hali alır.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & , \quad |y| < 1 \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Çözüm II:

(genel çözüm) $Y = \sin(x)$ için pdf = ?

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , \quad -\pi < x \leq \pi \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Burada $g(x)$ fonksiyonu $g(x) = \sin(x)$ olarak tanımlanacaktır. Bu durumda $Y - \sin(x) = 0$ denkleminin kökleri için.

$$a) \quad y > 0 \text{ iken } \begin{cases} x_1 = \sin^{-1}(y) \\ x_2 = \pi - \sin^{-1}(y) \end{cases}$$

Ayrıca

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x) \quad \text{olacaktır.}$$

Genel formül uyarınca $g'(x)$ ifadesinin köklerdeki değeri hesaplanmalıdır. Bunun için;

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{\cos(x)}{1} \right|_{x=x_1} = \cos(\sin^{-1}(y))$$

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{\cos(x)}{1} \right|_{x=x_2} = \cos(\pi - \sin^{-1}(y))$$

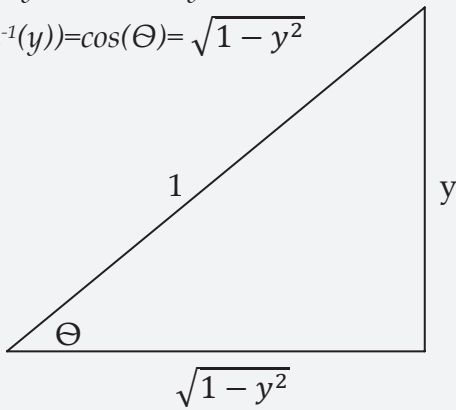
$$= \cos(\pi) \cdot \cos(\sin^{-1}(y)) + \sin(\pi) \cdot \sin(\sin^{-1}(y))$$

$$= -\cos(\sin^{-1}(y)) \text{ olacaktır.} \rightarrow \text{"0" olduğunu biliyoruz tabi.}$$

Not:

$$\sin(\Theta) = y \rightarrow \Theta = \sin^{-1}(y)$$

$$\cos(\sin^{-1}(y)) = \cos(\Theta) = \sqrt{1 - y^2}$$



Bu durumda

$$\left| \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_1} \right| = \left| \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_2} \right| = \sqrt{1 - y^2} \text{ olur.}$$

Son olarak

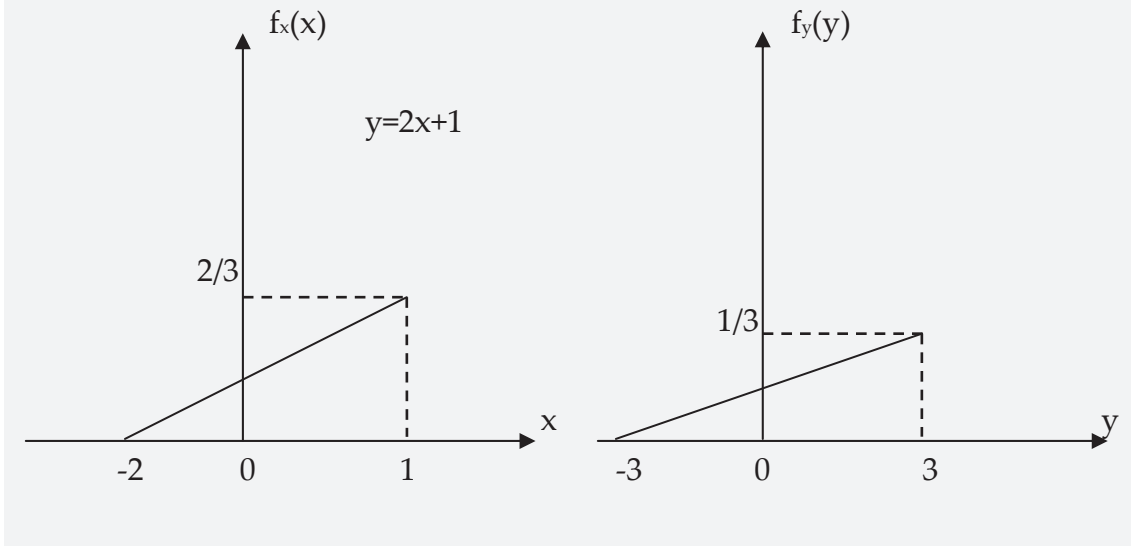
$$f_y(y) = \sum_{i=1}^2 f_x(x_i) \cdot \frac{1}{|g'(x_i)|} = \frac{f_x(\sin^{-1}(y))}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{f_x(\pi - \sin^{-1}(y))}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$f_y = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad 0 \leq y \leq 1 \text{ olur.}$$

b) $y < 0$ iken de benzer şekilde işlemler tekrarlanacaktır.

Örnek:

$y=2x+1$ olarak verilmiş olsun.



$$f_y(y) = \sum_{i=1}^n \frac{f_x(x_i)}{|g'(x_i)|} \quad , \quad y = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{f_x\left(\frac{y-1}{2}\right)}{2} = f_y(y)$$

$$y = -3 \quad \text{için} \quad f_x(-2) = 0$$

$$y = 3 \quad \text{için} \quad f_x(1) = 2/3$$

$$f_y(y) = (1/2)(2/3) = 1/3 \quad f_y(3) = 1/3$$

$$\bar{X} = E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-2}^1 x \frac{2}{9} (x+2) dx = \frac{2}{9} \int_{-2}^1 (x^2 + x) dx$$

$$= \frac{2}{9} \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-2}^1 = 0 \text{ olur.}$$

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx = \int_{-2}^1 (x+2) f_x(x) dx = \int_{-2}^1 (2x+1) \frac{2}{9} (x+2) dx$$

$$= \frac{2}{9} \int_{-2}^1 (2x+1)(x+2) dx = 1 \text{ olur}$$

$$E[x^2] = \frac{1}{2} \quad , \quad \sigma_x^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \sigma_y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Örnek:

$f_x(x) \rightarrow N(0,1)$ yani $\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ olarak veriliyor.

$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ x & , \quad x > 0 \end{cases}$ diye tanımlı olsun.

$$f_y(y) = \frac{f_x(x_i)}{g'(x_i)} = f_x(x) \text{ olduğunu hatırlayarak}$$

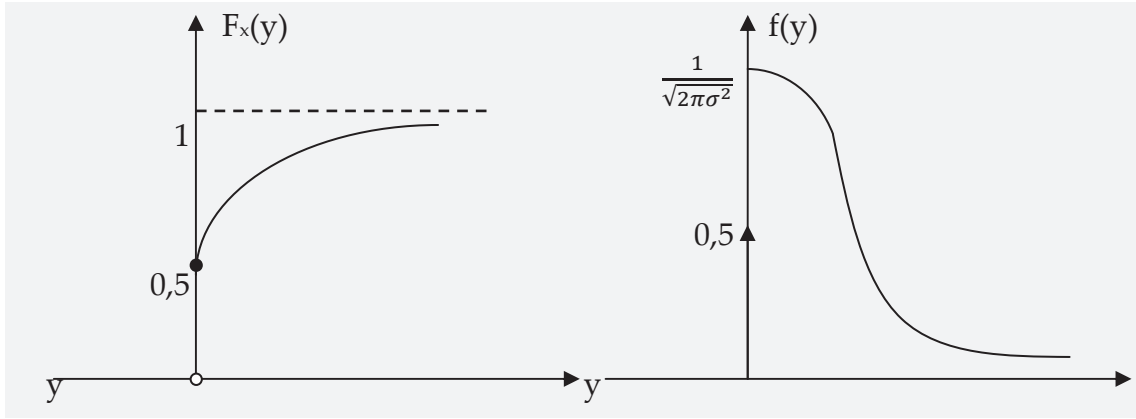
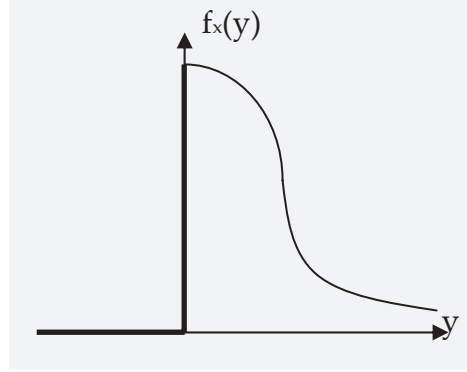
Tanımlı olduğu aralığa göre önce grafiğini çizersek yandaki şekil oluşur.

Çözüme geçelim:

$$P\{Y \leq y\} = P\{X \leq y\} \rightarrow x > 0 = F_x(y)$$

$P\{Y \leq y\} = P\{X \leq 0\} = 1/2$ olur. Gaussian olduğundan dolayı.

Şimdi $F_x(y)$ ve $f(y)$ yi çizelim.

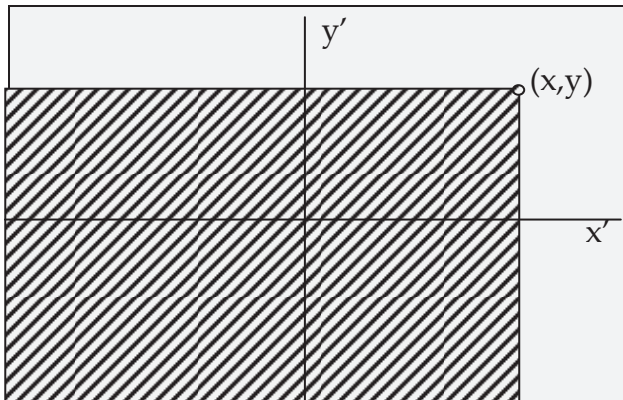


BİLEŞİK DAĞILIM VE YOĞUNLUK FONKSİYONLARI

Bir olasılık uzayında birden çok raslantı değişkeni tanımlamak mümkündür.

Örneğin:

$\{X \leq x, Y \leq y\} = \{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$ kümesi $\xi \in \Omega$ olaylarından oluşsun ve $X(\xi) \leq x$, $Y(\xi) \leq y$ olsun. Bu durumda $\{X \leq x, Y \leq y\}$ olayı ile tanımlı noktalar x' ve y' düzlemlerinde altta verilen şekildeki taralı bölgeye denk gelir.



Bu gösterimde x ve y değerleri geliş güzel olarak seçilmiştir. Ancak en genel durumda bunlar herhangi bir denkleme dönüştürülürler.

Bu durumda *bileşik olasılık dağılım fonk.* $F_{xy}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ olarak tanımlanır. Tanımı gereği $F_{xy}(x,y)$ bir ihtimali belirttiği için $F_{xy}(x,y) \geq 0$ şartını tüm x ve y değerleri için sağlanmalıdır.

i) $\{X \leq \infty, Y \leq \infty\}$ olması kesin olayı, durumu ifade ettiği için $F_{xy}(\infty, \infty) = 1$ olmalıdır.

Öte yandan $\{X \leq -\infty, Y \leq -\infty\}$ olması söz konusu olmayan olayı ifade eder ve bundan dolayı $F_{xy}(-\infty, -\infty) = 0$ olacaktır.

ii) Öte yandan $\{X \leq \infty\}$ ve $\{Y \leq \infty\}$ kümeleri de kesin olayları ifade ettikleri için $\{X \leq x, Y \leq \infty\} = \{X \leq x\}$ ve $\{X \leq \infty, Y \leq y\} = \{Y \leq y\}$ olacağından $F_{xy}(x, \infty) = F_x(x)$ $F_{xy}(\infty, y) = F_y(y)$ olur.

iii) Eğer $F_{xy}(x,y)$ sürekli ve türevi alınabilen bir fonksiyon olarak tanımlanmışsa *bileşik olasılık yoğ. Fonksiyonu*

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{xy}(x, y) \text{ olarak hesaplanabilir.}$$

Dolayısıyla $f_{xy}(x,y) dx dy = P[x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy]$ olacağı için tüm x ve y değerleri için $f_{xy}(x,y) \geq 0$ olur.

iii) Yukarıdaki eşitliği integral alarak ifade edersek

$$F_{xy}(x, y) = \int_{-\infty}^x d\xi \int_{-\infty}^y d\mu f_{xy}(\xi, \mu)$$

Eşitliği elde edilir. Bu durumda $F_{xy}(x,y)$ fonksiyonu negatif olmayan bir fonksiyonun integrali olarak tanımlandığına göre azalan karakterde olamaz. Yani, (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) iki tane sayı çifti olmak üzere $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ şartı da sağlanırsa

$F_{xy}(x_1, y_1) \leq F_{xy}(x_2, y_2)$ olmalıdır.

Ayrıca bir süreksizlik noktasında $F_{xy}(x,y)$ sağdaki ve üstteki değerleri alır. Yani

$$F_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow \infty}} F_{xy}(x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta) \text{ olur.}$$

Tüm bu özellikleri özetlersek

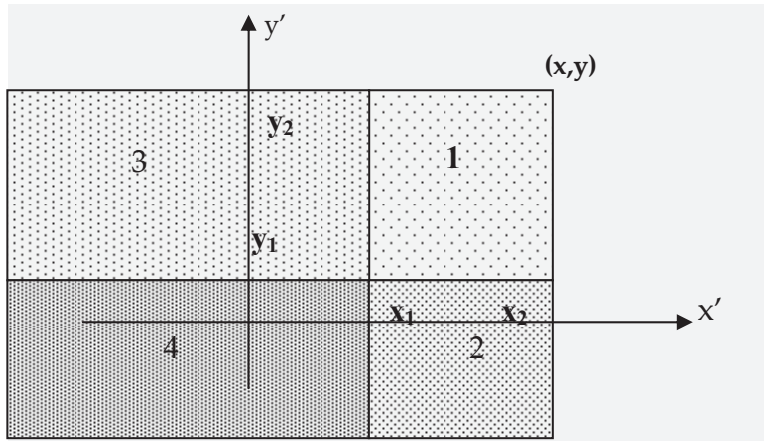
I) $F_{xy}(\infty, \infty) = 1, F_{xy}(x, -\infty) = F_{xy}(-\infty, y) = F_{xy}(-\infty, -\infty) = 0$

$F_{xy}(\infty, y) = F_y(y); F_{xy}(x, \infty) = F_x(x)$

II) $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$ ise $F_{xy}(x_1, y_1) \leq F_{xy}(x_2, y_2)$

III) $F_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow \infty \\ \delta \rightarrow \infty}} F_{xy}(x_0 + \varepsilon, y_0 + \delta) \text{ olur.}$

$\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$ kümesinin elemanlarını göz önüne alalım.



$F_{xy}(x_2, y_2) = \{1\} + \{2\} + \{3\} + \{4\}$ olur. Biz bu toplamın her bir ögesini ayrı ayrı yazacağız. Yani:

$$F_{xy}(x_2, y_2) = P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] + P[x_1 < X \leq x_2, Y \leq y_1] + P[X \leq x_1, y_1 < Y \leq y_2] + F_{xy}(x_1, y_1)$$

İse

$$F_{xy}(x_2, y_2) = P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] + \{ F_{xy}(x_2, y_1) - F_{xy}(x_1, y_1) \} + \{ F_{xy}(x_1, y_2) - F_{xy}(x_1, y_1) \} + F_{xy}(x_1, y_1) \rightarrow$$

$$P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = F_{xy}(x_2, y_2) - F_{xy}(x_2, y_1) - F_{xy}(x_1, y_2) + F_{xy}(x_1, y_1) \text{ olur.}$$

$F_x(x)$ ve $F_y(y)$ fonksiyonları bir bileşik dağılım fonksiyonundan elde edilirse bunlar **marjinal dağılım fonksiyonları** olarak adlandırılırlar. Yani:

$$F_x(x) = F_{xy}(x, \infty) = \int_{-\infty}^x d\xi \int_{-\infty}^{\infty} dy f_{xy}(\xi, y)$$

$$F_y(y) = F_{xy}(\infty, y) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} dx f_{xy}(x, \mu)$$

marjinal yoğunluk fonksiyonları ise

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} \quad \text{ve} \quad f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} \quad \text{olacakları için yularındaki}$$

eşitliklerin türevi alındığında,

$$f_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx} = \frac{df_{xy}(x, \infty)}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dy$$

$$f_y(y) = \frac{dF_y(y)}{dy} = \frac{df_{xy}(\infty, y)}{dy} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dx$$

Buradan hareketle bazı sonuçlar:

I) $f(x, y) \geq 0$, tüm x ve y değerleri için

$$II) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dx \cdot dy = 1 \quad (\text{kesin olay})$$

III) $f_{xy}(x, y)$ bir olasılığı ifade etmezken:

$$f_{xy}(x, y) dx \cdot dy = P[x < X \leq x+dx_1, y < Y \leq y+dy] \quad \text{bir olasılık ifade eder.}$$

BAĞIMSIZ RASLANTI DEĞİŞKENLERİ

X ve Y gibi iki raslantı değişkeni, her x,y değer ikilisi için $\{ X \leq x \}$ ve $\{ Y \leq y \}$ olayları birbirinden bağımsız iseler kendileri de bağımsız olarak adlandırılırlar. Daha önceki tanımlardan A ve B gibi iki olay $P[AB] = P[A].P[B]$ şartı sağlanması halinde birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmışlardı. Burada

$$A.B = \{ X \leq x \} \cap \{ Y \leq y \} \text{ tanımı}$$

$A = \{ X \leq x \}$ ve $B = \{ Y \leq y \}$ olmak üzere yapılırsa, eğer sadece ve sadece her x,y değer ikilisi için:

$$F_{xy}(x, y) = F_x(x).F_y(y)$$

Şartı sağlanırsa X ve Y raslantı değişkenleri bağımsız olacaklardır: Ayrıca,

$$f_{xy}(x, y) = \frac{d^2 F_{xy}(x, y)}{dx dy} = \frac{dF_x(x)}{dx} \cdot \frac{dF_y(y)}{dy} \quad \rightarrow \quad f_{xy}(x, y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

Sonucuna ulaşılır. Şartlı olasılık tanımlarında bağımsız X, Y raslantı değişkenleri için...;

$$F_x(x | Y \leq y) = \frac{F_{xy}(x, y)}{F_y(y)} = F_x(x) \quad \text{veya}$$

$$F_y(y | X \leq x) = \frac{F_{xy}(x, y)}{F_x(x)} = F_y(y) \quad \text{olacaktır}$$

Bu sonuçlar ışığında türev alınarak

$$f_x(x | Y \leq y) = f_x(x) \quad \text{ve} \quad f_y(y | X \leq x) = f_y(y) \quad \text{elde edilir ki buradan}$$

Bağımsız olaylar için şartlı olasılık yoğunluk fonksiyonlarının marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını vereceği sonucunu elde ederiz. Ayrıca daha önce elde ettiğimiz bir sonuçtan...:

$$P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = F_{xy}(x_2, y_2) - F_{xy}(x_2, y_1) - F_{xy}(x_1, y_2) + F_{xy}(x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned} P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] &= F_x(x_2) \cdot F_y(y_2) - F_x(x_2) \cdot F_y(y_1) - F_x(x_1) \cdot F_y(y_2) + F_x(x_1) \cdot F_y(y_1) \\ &= F_x(x_2) [F_y(y_2) - F_y(y_1)] - F_x(x_1) [F_y(y_2) - F_y(y_1)] \\ &= [F_x(x_2) - F_x(x_1)] [F_y(y_2) - F_y(y_1)] \end{aligned}$$

$P[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = P[x_1 < X \leq x_2] \cdot P[y_1 < Y \leq y_2]$ sonucu elde edilir.

Örnek:

Aşağıda verilen f_{xy} fonksiyonu için X ve Y raslantı değ. Bağımsız olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= \frac{1}{2\pi G^2} e^{-(1/2G^2)(x^2+y^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi G^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{G^2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi G^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y^2}{G^2})} \end{aligned}$$

Olacağı için X ve Y bağımsız olacaktır.

Örnek:

$$f_{xy}(x, y) = \begin{cases} A(x+y), & 0 < x \leq 1 \text{ ve } 0 < y \leq 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Şeklinde tanımlanmış olsun.

Cevap:

I) A=?

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x, y) dx \cdot dy = 1 \quad \Rightarrow$$

$$A \int_0^1 dy \int_0^1 (x+y) dx = A \cdot \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) \Big|_0^1 dy = A \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y \right) dy$$

$$= A \left(\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = A \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = A \quad \Rightarrow$$

A = 1 olmalıdır.

II) Marjinal pdf ler = ?

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(x,y) dy = \int_0^1 (x+y) dy = \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad \text{olur.}$$

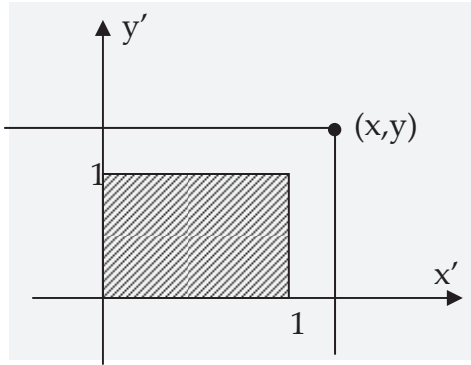
o zaman $f_x(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & , \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$

benzer şekilde $f_y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & , \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$

III) $F_{xy}(x,y) = ?$

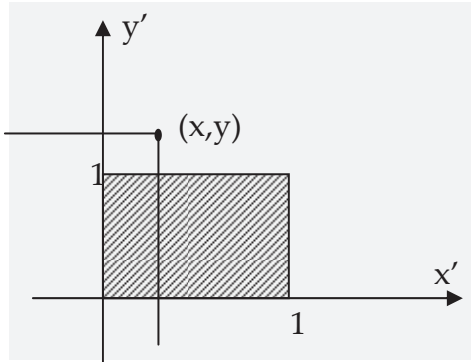
$F_{xy}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ tanımı yapılırsa söz konusu olasılığı hesaplamak için farklı durumları göz önüne almak gerekir. Buna göre ,

a) $x \geq 1$ ve $y \geq 1$ olması durumunda...;



$$F_{xy}(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f_{xy}(x' + y') dx' \cdot dy' = 1$$

b) $0 < x \leq 1$, $y \geq 1$ olması durumunda...;



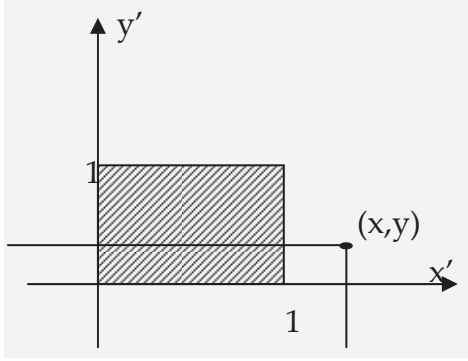
$$F_{xy}(x,y) = \int_{y'=0}^1 \int_{x'=0}^x f_{xy}(x' + y') dx' \cdot dy'$$

$$= \int_{y'=0}^1 \left(\frac{(x')^2}{2} + y'x' \right) \Big|_0^x \cdot dy$$

$$= \int_{y'=0}^1 \left(\frac{x^2}{2} + y'x \right) \cdot dy$$

$F_{xy}(x,y) = (x+1) \cdot \frac{x}{2}$ olarak bulunur.

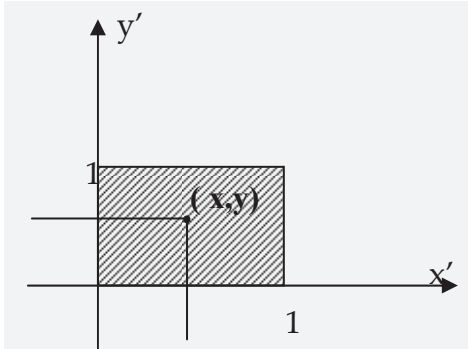
c) $0 < y \leq 1$, $x \geq 1$ olması durumunda...;



$$F_{xy}(x, y) = \int_{y'=0}^y \int_{x'=0}^1 f_{xy}(x' + y') dx' \cdot dy'$$

$$F_{xy}(x, y) = (y + 1) \cdot \frac{y}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

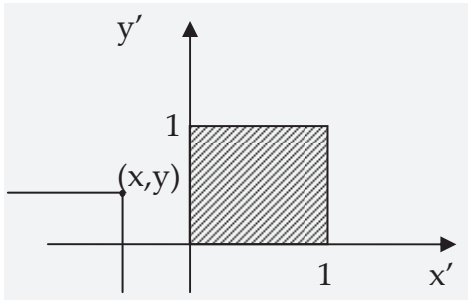
d) $0 < x \leq 1$, $0 < y \leq 1$ olması durumunda...;



$$F_{xy}(x, y) = \int_{y'=0}^y \int_{x'=0}^x f_{xy}(x' + y') dx' \cdot dy'$$

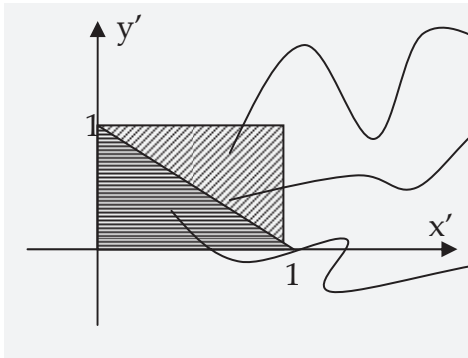
$$F_{xy}(x, y) = (x + y) \cdot \frac{x \cdot y}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

e) $\begin{cases} x < 0, y \text{ nin her değeri veya} \\ y < 0, x \text{ in her değeri} \end{cases}$
Olması durumunda...;



$$F_{xy}(x, y) = 0 \text{ olur.}$$

f) $P[X+Y \leq 1] = ?$ İfadesinin ne anlama geldiğine bakalım.



$X+Y=1$ doğrusunun üstü $X+Y>1$ bölgesini belirtiyor

$X+Y=1$ doğrusu

$X+Y=1$ doğrusunun altı $X+Y<1$ bölgesini belirtiyor

$$\begin{aligned}
P[X + Y \leq 1] &= \iint_{x'+y' \leq 1} f_{xy}(x', y') \cdot dx' \cdot dy' = \int_{x'=0}^1 \int_{y'=0}^{1-x'} (x' + y') dy' \cdot dx' \\
&= \int_{x'=0}^1 \frac{1 - (x')^2}{2} \cdot dx' = \frac{1}{3} \text{ olur.}
\end{aligned}$$

Örnek:

Bir önceki örnekte çarpım halinde ifade edilemeyen bir pdf gördük. Şimdi de bu tür başka bir fonksiyona bakalım;

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi B^2 \sqrt{1 - \mu^2}} \exp\left(\frac{-1}{2B^2(1 - \rho^2)}(x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right)$$

Bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu $\rho \neq 0$ için tanımlanmış olsun. Bu durumda X ve Y bağımsız olması için:

$\rho=0$ durumunda $f_{xy}(x,y)=f_x(x).f_y(y)$ şeklinde ifade edilip bağımsız olacaklardır.

İKİ RASLANTI DEĞİŞKENİNİN TEK FONKSİYONU [Z=g(X,Y)]

Çoğu mühendislik uygulamalarında bir Z raslantı değişkeni belli bir aralıkta X ve Y gibi iki (hatta daha çok) raslantı değişkenine bağlı olarak ifade edilebilir. Mesela:

- Bir kuvvetlendirici girişindeki Z sinyali, X gibi bir işaret ve bundan bağımsız olarak tanımlanan Y gürültü cinsinden $Z=X+Y$ şeklinde tanımlanabilir.

-iki işareti çarpan bir sistemde, X bu çarpıcının bir girişindeki, Y de bu çarpıcının diğer girişindeki sinyal olmak üzere $Z=X.Y$ şeklinde tanımlı çıkış sinyali Z'nin pdf, nasıl tanımlanabilir?

- X ve Y doğrultularında bağımsız hareket eden bir parçacık için X ve Y ile bu eksenlerdeki hareketi ifade eden raslantı değişkenleri tanımlanırsa $Z=(X^2+Y^2)^{1/2}$ şeklinde tanımlı ve toplam yer değiştirmeyi ifade eden Z rast. değişkeninin pdf si nasıl hesaplanabilir?

Genel olarak $Z=g(X,Y)$ şeklinde tanımlanacağımız bu tür problemlerin çözümü daha önce çözdüğümüz $Y=g(X)$ şeklinde tanımlı problemleri çözümünden farklı değildir. Burada öyle bir C_z çözüm kümesi bulunmalıdır ki bunun için

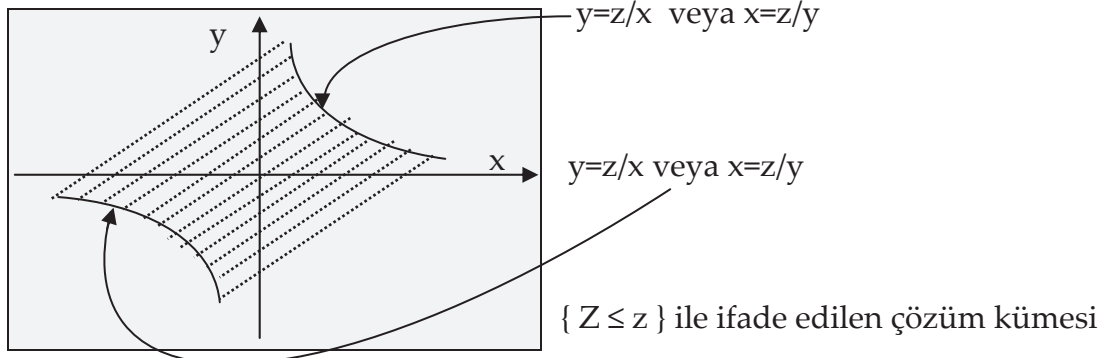
$\{ Z \leq z \}, \{ (X,Y) \in C_z \}$ olayları aynı durumu ifade etmelidir. Bu durumda

$$F_z(z) = \iint_{(x,y) \in C_z} f_{xy}(x, y) \cdot dx \cdot dy \quad \text{olacaktır.}$$

Bu tür problemleri çözümü $Y = g(X)$ şeklinde tanımlanan problemlerin çözümünden daha karmaşıktır. Ancak *i) yardımcı eksen , ii) karakteristik fonksiyonların* kullanımı ile bu problemler çözülebilirler. Önce bazı örnekleri inceleyelim.

Örnek:

$Z=X.Y$ şeklinde X ve Y raslantı değişkenleri cinsinden tanımlı Z raslantı değişkenleri için çözüm kümesi C_z yi elde edin. $F_z(z)$ ve $f_z(z)$ =?



{ $X.Y \leq z$ } şeklinde tanımlı olacaktır. Yani her herhangi bir " z " değeri için ($z > 0$), $x.y \leq z \Rightarrow y \leq z/x$ olacaktır. Bu şartı sağlayan çözüm kümesi yukarıda gösterilen taralı bölgedir. Bu durumda...;

$$F_z(z) = P[Z \leq z] = P[X.Y \leq z] \Rightarrow$$

$$F_z(z) = P[Y \leq z/x] \Rightarrow$$

$$F_z(z) = \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z/y} f_{xy}(x, y) \cdot dx \right) \cdot dy + \int_{-\infty}^0 \left(\int_{z/y}^{\infty} f_{xy}(x, y) \cdot dx \right) \cdot dy$$

Burada $G_{xy}(x, y) \triangleq \int f_{xy}(x, y) dx$ belirsiz integralini tanımlarsak bu durumda

$$F_z(z) = \int_0^{\infty} [G_{xy}(z/y, y) - G_{xy}(-\infty, y)] \cdot dy + \int_{-\infty}^0 [G_{xy}(-\infty, y) - G_{xy}(z/y, y)] \cdot dy \text{ olur.}$$

Buradan hareketle,

$$f_z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = ? \text{ sorusunu nasıl cevaplarız?}$$

Yukarıda elde edilen $F_z(z)$ eşitliği için,

$K_{xy}(x, y) \triangleq \int G_{xy}(x, y) dy$ belirsiz integralini tanımlayıp yazalım. Böylece

$$F_z(z) = K_{xy}(z/y, y) \Big|_0^{\infty} - K_{xy}(-\infty, y) \Big|_0^{\infty} + K_{xy}(\infty, y) \Big|_{-\infty}^0 - K_{xy}(z/y, y) \Big|_{-\infty}^0 \text{ olur.}$$

$$\frac{dF_z(z)}{dz} = \left(\frac{dK_{xy}(z/y, y)}{dz} - \frac{dK_{xy}(-\infty, y)}{dz} \right) \Big|_{y=0}^{\infty} + \left(\frac{dK_{xy}(\infty, y)}{dz} - \frac{dK_{xy}(z/y, y)}{dz} \right) \Big|_{y=-\infty}^0$$

$$f_z(z) = \left(\frac{dK_{xy}(z/y, y)}{dz} \right) \Big|_{y=0}^{\infty} - \left(\frac{dK_{xy}(z/y, y)}{dz} \right) \Big|_{y=-\infty}^0 \Rightarrow$$

$$f_z(z) = \left(\int \frac{1}{y} f_{xy}(z/y, y) \cdot dy \right) \Big|_{y=0}^{\infty} - \left(\int \frac{1}{y} f_{xy}(z/y, y) \cdot dy \right) \Big|_{-\infty}^0$$

$$f_z(z) = \left(\int \frac{1}{|y|} f_{xy}(z/y, y) \cdot dy \right) \Big|_{y=0}^{\infty} + \left(\int \frac{1}{|y|} f_{xy}(z/y, y) \cdot dy \right) \Big|_{-\infty}^0$$

$$f_z(z) = \int \frac{1}{|y|} f_{xy}(z/y, y) \cdot dy \text{ olarak bulunur.}$$

Özel bir durum olarak X ve Y bağımsız ve benzer olmak üzere

$$f_x(x) = f_y(y) \triangleq \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + (x)^2} \text{ olarak tanımlanmış olsun. Bu durumda,}$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|y|} \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + (z/y)^2} \frac{\alpha/\pi}{\alpha^2 + y^2} dy \Rightarrow$$

$$f_z(z) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2 + \alpha^2 u} \frac{1}{\alpha^2 + u} du \Rightarrow$$

$$f_z(z) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 \frac{1}{z^2 - \alpha^4} \lim \left(\frac{x^2}{\alpha^4} \right) \text{ olur.}$$

Örnek:

Z=X+Y şeklinde tanımlı bir raslantı değişkeni için $f_z(z)$ 'nin hesaplanması

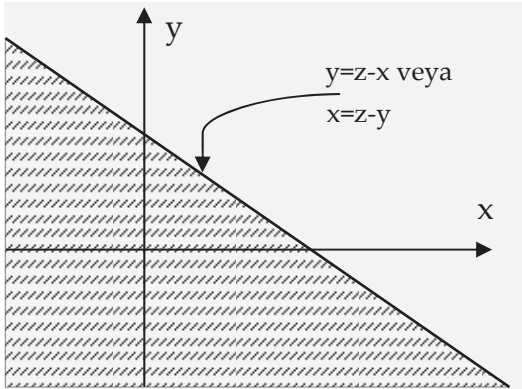
Z=g(X,Y) şeklindeki problemlerin en yaygın olanıdır.

{ Z ≤ z } = { X+Y ≤ z } olarak tanımlı iki ayrı küme aynı tanım bölgesine sahiptirler.

Bu durumda,

$$P[Z \leq z] = P[X+Y \leq z] \Rightarrow$$

$$F_z(z) = \iint_{x+y \leq z} f_{xy}(x, y) \cdot dx \cdot dy \text{ olacaktır.}$$



Çözüm kümesi $y = z - x$ eğrisinin solunda kalan bölge olacağına göre

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f_{xy}(x, y) dx \right) dy \Rightarrow$$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} [G_{xy}(z - y, y) - G_{xy}(-\infty, y)] dy \text{ olur.}$$

Burada $G_{xy}(x, y) \triangleq \int f_{xy}(xy) dx$ olarak tanımlandığını kabul ediyoruz.

Burada $F_z(z)$ fonksiyonunu elde etmek için ,

$\frac{d}{dz}F_z(z)$ değerini hesaplamak gerekir. O zaman

$$f_z(z) = \frac{d}{dz}F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{d}{dz}G_{xy}(z-y, y) \right] dy \quad \Rightarrow$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(z-y, y) \cdot dy \quad \text{sonucu elde edilir.}$$

Çoğu durumda X ve Y birbirinden bağımsız iki raslantı değişkeni tanımlı olabilirler. O zaman

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y, y) \cdot f_y(y) \cdot dy \quad \text{şeklinde tanımlı bu pdf aynı zamanda } f_x \text{ ile } f_y$$

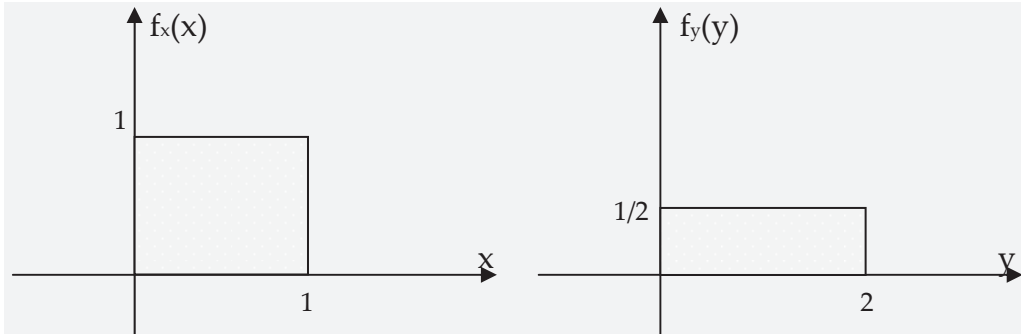
fonksiyonlarının *konvolüsyonu* olarak da bilinir.

Görüldüğü gibi bu tip problemleri tanımlardan yararlanarak çözmek her zaman için mümkün olabilmektedir.

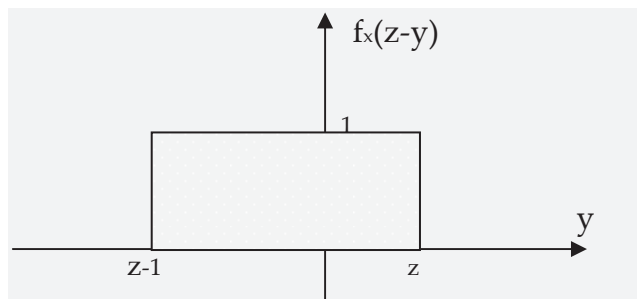
Örnek:

"X" raslantı değ. $[0,1]$ aralığında, "Y" raslantı değ. İse $[0,2]$ aralığında Uniform dağılıma sahip olsun buna göre şu sorulara cevap arayalım.

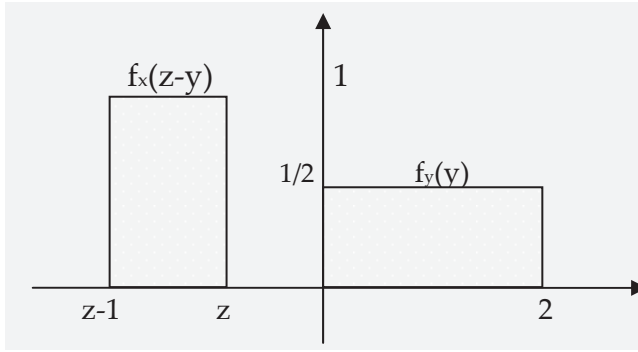
a) $f_x(x)$ ve $f_y(y)$ fonksiyonlarını çizelim.



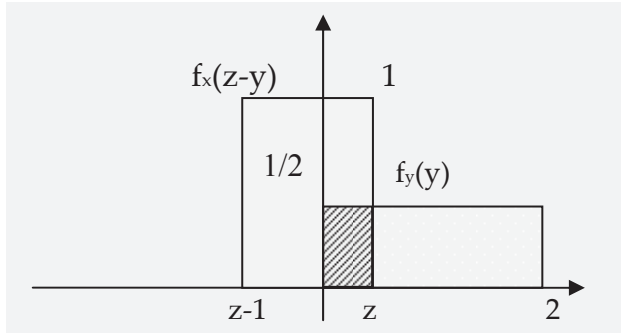
b) $f_x(x)$ fonksiyonununun y eksenine göre simetrisini alıp grafiğin parametresini değişelim ve grafiği z kadar öteleyelim. Biz bununla $f_x(z-y)$ yi elde ederiz.



c) $z < 0$ için $f_x(z-y)$ ile $f_y(y)$ çakışan kısmına bakalım

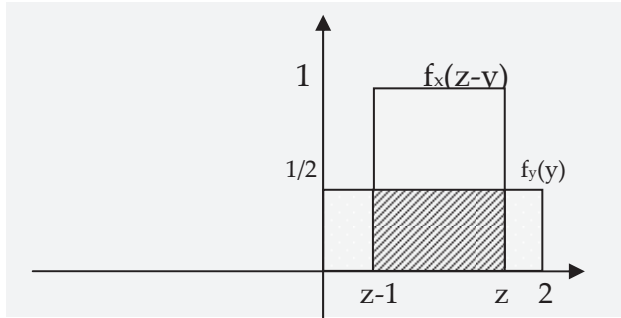


d) $0 < z < 1$ için



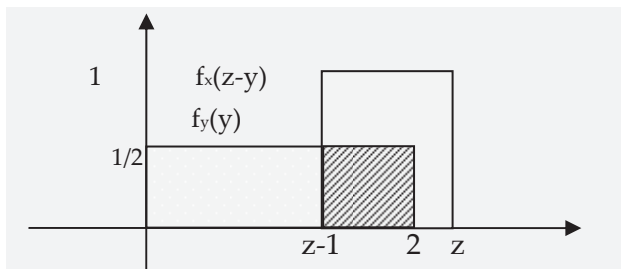
$$= \int_0^z 1 \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}z \text{ olur.}$$

e) $1 < z < 2$ için



$$= \int_{z-1}^z 1 \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}y \Big|_{z-1}^z = \frac{1}{2} \text{ olur}$$

f) $2 < z < 3$ için

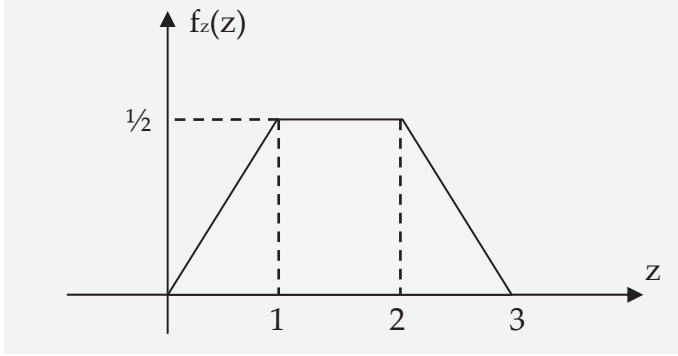


$$= \int_{z-1}^2 1 \cdot \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}y \Big|_{z-1}^2 = \frac{3-z}{2} \text{ olur.}$$

g) $z > 3$ $f_z(z)$ çakışan alan olmadığı için 0 olur.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0; & \dots\dots\dots z < 0 \\ 1/2; & \dots\dots\dots 0 < z < 1 \\ 1/2; & \dots\dots\dots 1 < z < 2 \\ (3-z)/2; & \dots\dots\dots 2 < z < 3 \\ 0; & \dots\dots\dots z > 3 \end{cases} \quad \text{elde edilir.}$$

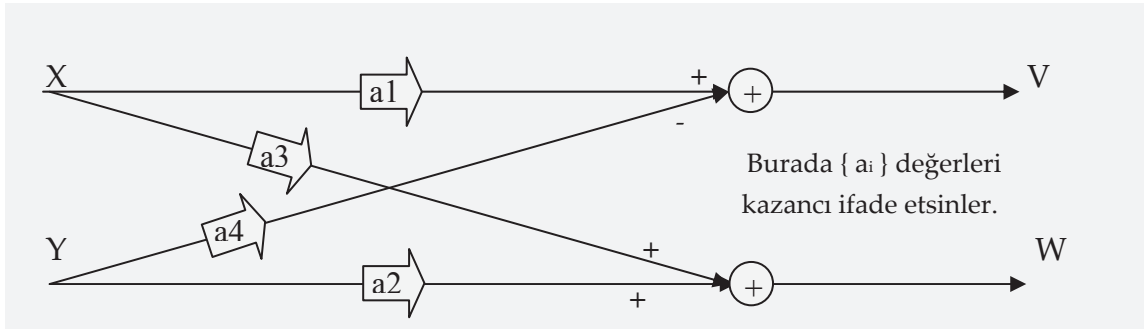
$f_z(z)$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonunu çizersek



$P[z < 2] \Rightarrow 3/4$
 $P[z < 3] \Rightarrow 1$
 elde ederiz.

İki Raslantı Değişkeninin İki Fonksiyonu:

$V=g(x,y)$ ve $W=h(x,y)$ tipindeki problemlerdir



Yukarıdaki şekil ile belirli bir haberleşme sistemi (steryo temel-bantlı sistem oluşumu gibi) ifade edilmektedir. Veya $\{ a_i \}$ değerleri 1 olarak seçildiklerinde, belirli bir haberleşme sisteminde V ve W sinyalleri (sırasıyla X ve Y sinyallerinin farkı ve toplamları) gönderilen sinyali tespit etmekte kullanılır.

Kısaca $V=g(x,y)$ ve $W=h(x,y)$ fonksiyonları tanımlı iken, $f_{xy}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonları ile türevi alınabilen $g(x,y)$ ve $h(x,y)$ fonksiyonları için $F_{vw}(v,w)$ ve $f_{vw}(v,w)=?$

Bu tür problemlerin çözümlerinde

$$f_{vw}(v,w) = \frac{f_{xy}(x,y)}{|j|} \Bigg|_{\substack{x=\phi(v,w) \\ y=\psi(v,w)}} = f_{xy}(x,y) \cdot \frac{|j|}{|j|} \Bigg|_{\substack{x=\phi(v,w) \\ y=\psi(v,w)}} \quad \text{tanımlamasından faydalanılır.}$$

$v=g(x,y)$ ve $w=h(x,y)$ olmak üzere tanımlanan
 $x=\phi(v,w)$ ve $y=\psi(v,w)$ fonksiyonları cinsinden

$$J \triangleq \frac{\partial(g,h)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} \text{ matrisine}$$

$$g(x,y)=v$$

$h(x,y)=w$ dönüşüm matrisinin *jacobyen matrisi*,

$$\tilde{J} \triangleq \frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(v,w)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial w} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \end{bmatrix} \text{ matrisine}$$

$$x=\phi(v,w)$$

$y=\psi(v,w)$ dönüşümünün *jacobyen matrisi* denir.

Örnek:

$$V=g(x,y)=3x+5y$$

$W=h(x,y)=x+2y$ fonksiyonları X ve Y raslantı değişkenleri için tanımlanmış olsun.

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]$$

İçin $f_{vw}(v,w)=?$

Çözüm:

$$X=\phi(v,w)=2v-5w \quad \text{ve}$$

$$Y=\psi(v,w)=-v+3w \quad \text{olacaktır.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial v} = 2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial w} = -5, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = -1 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \psi}{\partial w} = 3 \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Bu durumda

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{J} = 2 * 3 - (-5) * (-1) = 1$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]$$

$$f_{vw}(v,w) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}((2v-5w)^2 + (-v+3w)^2)\right] \Rightarrow$$

$$f_{vw}(v,w) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(5v^2 - 26vw + 34w^2)\right] \text{ olur.}$$

Yani bu dönüşüm korelasyonu olmayan iki raslantı değişkenini korelasyonu olan ye iki raslantı değişkenine dönüştürmüştür.

Şu ana kadar gördüğümüz formüller $V=g(x,y)$ ve $W=h(x,y)$ fonksiyonları birebir fonksiyon oldukları zaman yazılabilirler. Ancak $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), \dots, (x_n,y_n)$ gibi n-tane $V=g(x_i,y_i), W=h(x_i,y_i)$ kökünün olması durumunda çözüm;

$$f_{vw}(v,w) = \sum_{i=0}^n \frac{f_{xy}(x_i,y_i)}{|J_i|} = \sum_{i=0}^n f_{xy}(x_i,y_i) |\tilde{J}_i|$$

Şeklinde elde edilir. Buradaki "i" indisi jacybyen matrisinin i. kökte değerlendirileceğini ifade eder.

Örnek:

$$V = g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ve}$$

$$W = h(x,y) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \end{cases} \quad \text{olarak verilsin.}$$

Eğer X ve Y birbirinden bağımsız ve benzer şekilde değişiyorsa ve $f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\pi G^2} \exp\left[-\frac{1}{2G^2}(x^2 + y^2)\right]$ olarak verilmişse $f_{vw}(v,w)=?$

Çözüm:

Öncelikle verilen iki denklemin köklerini bulalım.

$$V = g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$W = h(x,y) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0 \end{cases} \quad \text{burada } \tan^{-1}y/x \text{ ifadesi } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

aralığında tanımlık olduğu için w ifadesi de 2π aralıkta tanımlıdır.

Burada $x \geq 0$ iken $-\pi/2 \leq w \leq \pi/2$ ve $\cos(w) \geq 0$ olur.

$x < 0$ iken $\pi/2 < w < 3\pi/2$ ve $\cos(w) < 0$ olur.

Dolayısıyla buradaki tek çözüm

$$X=V.\cos(W)=\phi(v,w) \quad \text{ve}$$

$$Y=V.\sin(W)=\psi(v,w) \quad \text{dır.}$$

$$\tilde{J} = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(v, w)} = \begin{vmatrix} \cos w & -v.\sin w \\ \sin w & v.\cos w \end{vmatrix} = v$$

$$f_{vw}(v,w) = v.f_{xy}[v.\cos(w), v.\sin(w)]$$

$$f_{vw}(v,w) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{v}{G^2} \exp\left[-\frac{1}{G^2}\right], & v > 0, -\frac{\pi}{2} \leq w < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$f_{vw}(v,w)=f_v(v).f_w(w)$ olacaktır.

Yani V ve W birbirinden bağımsız raslantı değişkenleridir. Burada V Rayleigh, W da 2π aralığında Uniform dağılmış iki raslantı değişkenidir.

KARAKTERİSTİK FONKSİYON:

Bir X raslantı değişkenine ait karakteristik fonksiyon

$$Q_x(w) = E[e^{jwx}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \cdot e^{jwx} \cdot dx$$

Şeklinde tanımlıdır. Bu tanım e^{jwx} terimindeki kullanılmayan (-) işareti dışında $f_x(x)$ fonksiyonu fourier transformu olarak ta adlandırılabilir.

Karakteristik fonksiyon bağımsız raslantı değişkenlerinin toplamının hesaplandığı problemlerde sıkça kullanılır. Daha önce görmüş olduğumuz iki raslantı değişkeninin fonksiyonu şeklindeki uygulamaların bir örneği $Z=X_1+X_2$ şeklinde tanımlı bir toplam fonksiyonu için gerekli olan işlemler yapılacak olursa,

$$f_z(z) = f_{x_1}(\tau) \cdot f_{x_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1}(\tau) \cdot f_{x_2}(z - \tau) \cdot d\tau$$

Şeklinde toplam raslantı değ. olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{x_1}(x)$ ve $f_{x_2}(z)$ cinsinden ifade edilirler. Yukarıdaki gibi tanımlanmış integral işlemine **konvolüsyon** adı verilir ve analitik olarak hesaplamak her zaman pratik olmayabilir.

Ancak yukarıdaki gibi tanımlı karakteristik fonksiyonlar cinsinden bu konvolüsyon işlemi basit bir çarpma işlemine dönüştürülecektir. Yani:

$$Q_z(w) = Q_{x_1}(w) \cdot Q_{x_2}(w)$$

Şeklindeki tanım Z raslantı değişkeninin karakteristik fonksiyonu olup hesaplanması daha basittir. Sonrasında $f_z(z)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu elde etmek için:

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q_z(w) \cdot e^{-jwz} dw \quad \text{şeklinde}$$

tanımlı ters dönüşüm formülünden faydalanılırsa En genel halde:

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

$$f_z(z) = f_{x_1}(z) * f_{x_2}(z) * \dots * f_{x_N}(z) \quad \text{veya}$$

$$Q_z(w) = Q_{x_1}(w) * Q_{x_2}(w) * \dots * Q_{x_N}(w) \quad \text{olacaktır.}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ_z(w)}{dw} &= \frac{d}{dw} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_z(z) e^{jwz} dz \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_z(z) \frac{d}{dw} (e^{jwz}) dz \\ &= j \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_z(z) e^{jwz} dz \end{aligned}$$

$$= E[z^n] = \frac{1}{j^n} \frac{d^n Q_z(w)}{dw^n} \Big|_{w=0} \quad \text{bu n.dereceden momenti verir.}$$

n=1 için integralin sonucu;

$$E[z] = \frac{1}{j} \frac{dQ_z(w)}{dw} \Big|_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_z(z) e^{jwz} dz \Big|_{w=0} \quad \text{olur.}$$

BİLEŞİK KARAKTERİSTİK FONKSİYON

$$Q_{x_1, x_2, \dots, x_N}(w_1, w_2, \dots, w_N) = E[e^{j(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_N x_N)}] \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} f_{x_1, x_2, \dots, x_N}(x_1, x_2, \dots, x_N) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_1, x_2, \dots, x_N}(w_1, w_2, \dots, w_N) * (e^{j(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_N x_N)}) \end{aligned}$$

Eşitlikleri yukarıda yapılan tanımlamanın bileşik olasılık dağılım fonksiyonu için çok boyutlu genişletilmiş halidir.

BİRLEŞİK MOMENTLER

Z=g(x,y) ve

$$E[z] = E[g(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_z(z) dz \Big|_{w=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \cdot f_{xy}(x, y) dx dy$$

Eğer X ve Y birbirinden bağımsızsa z=g(x) ve w=h(Y) de bağımsızdır.

E[g(x) h(y)] = E[g(x)].E[h(Y)] olur.

Örnek:

$$E[xy^3] = \int \int xy^3 f_{xy}(x, y) dx dy \quad \text{olarak veriliyor}$$

X ve Y bağımsız iki raslantı değişkeni ise E[xy³] ifadesini yazınız.

Cevap:

Bağımsız olduklarından E[xy]=E[x].E[y] yazılabilir. Dolayısıyla

$$E[xy^3] = E[x].E[y^3] \quad \text{olur.}$$

KOVARYANS

X ve Y iki raslantı değişkeni olmak üzere

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] \\ &= E[xy - \mu_y x - \mu_x y + \mu_x \mu_y] \\ &= E[xy] - \mu_y E[x] - \mu_x E[y] + \mu_x \mu_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E[xy] - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y \\
&= E[xy] - \mu_x \mu_y \\
&= E[xy] - E[x].E[y] \quad \text{olarak tanımlanır.}
\end{aligned}$$

$|Cov(x, y)| \leq \sigma_x \sigma_y$ olmalıdır.

$\rho_{xy} = \frac{Cov(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$ buradaki ρ_{xy} ilişki katsayısı denir. bu kolerasyon katsayısı

$-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ arasındadır.

Eğer X ve Y bağımsız ise

$$Cov(x, y) = E[xy] - E[x].E[y]$$

$$= E[x].E[y] - E[x].E[y]$$

$$= 0 \quad \text{ve} \quad \rho_{xy} = 0 \quad \text{olur.}$$

X ve Y bağımsız ise $Cov(x, y) = 0$, $\rho_{xy} = 0$ olur. Yani kolerasyon yoktur

→ Eğer $Cov(x, y) = 0$ ise her zaman X ve Y bağımsızdır. Ama

→ Eğer $\rho_{xy} = 0$ ise X ve Y her zaman **bağımsız olmaz.**

Örnek:

$Z = aX + bY$ ise $(\sigma_z)^2$ 'yi, σ_x , σ_y ve ρ_{xy} cinsinden ifade ediniz.

Cevap:

$$E[z] = E[ax + by] = aE[x] + bE[y]$$

$$= a\mu_x + b\mu_y$$

$$\begin{aligned}
\text{Ve} \quad \sigma^2 &= E[(z - \mu_z)]^2 = E[\{(ax + by) - (a\mu_x + b\mu_y)\}^2] \\
&= E[\{a(x - \mu_x) + b(y - \mu_y)\}^2] \\
&= a^2 E[(x - \mu_x)^2] + b^2 E[(y - \mu_y)^2] + 2ab Cov(xy) \\
&= a^2 (\sigma_x)^2 + b^2 (\sigma_y)^2 + 2ab \rho_{xy} (\sigma_x \sigma_y)
\end{aligned}$$

Özel olarak X ve Y bağımsız ise

$a = b = 1$ ise $Z = X + Y \Rightarrow (\sigma_z)^2 = (\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2$ olur.

MERKEZİ LİMİT TEOREMİ

Tanım olarak normalize edilmiş çok sayıda birbirinden bağımsız raslantı değişkenleri için $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ için sıfır ortalama ve $(\sigma_1)^2, (\sigma_2)^2, \dots, (\sigma_N)^2$ ile ifade edilen sonlu varyans değerleri

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad \text{toplam değerinden küçükken bu raslantı değişkenlerinin toplamı}$$

Normal dağılıma yakınsar

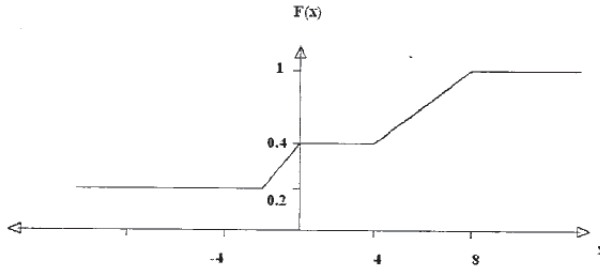
Teorem: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ olasılık dağılım fonksiyonları $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3), \dots, f_n(x_n)$ olarak tanımlanmış "n" tane birbirinden bağımsız raslantı değişkeni tanımlanmış olsunlar. Bunlar için;

$$\bar{X}_k = 0 \quad \text{ve} \quad Var[X_k] = \sigma_k^2 \quad \text{olmak üzere}$$

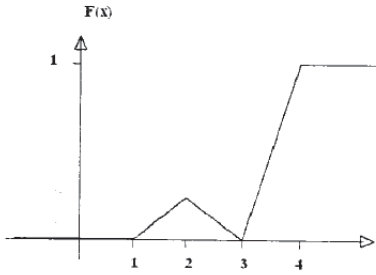
$$S_n^2 \triangleq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad \text{tanımlansın}$$

Çözümlü Set-1

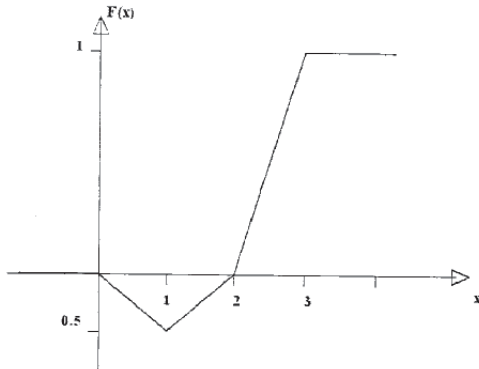
- 1) Bir zar atılması deneyinde oluşabilecek sonuçlar $i=1,2,3,4,5,6$ olsun. bu deneyle ilişkili olarak $X=i^2$ rastlantı değişkeni tanımlanıyor.
- Bu rastlantı değişkenine ilişkin olasılık dağılım fonksiyonunu (PDF) çiziniz.
 - $F(12)$ değerini bulunuz.
 - $P(5 < X \leq 7)$ olma ihtimalini bulunuz.
 - $P(7 < X \leq 11)$ olma ihtimalini bulunuz.
- 2) Aşağıdaki grafiklerden hangileri olasılık dağılım fonksiyonu grafiği olabilirler, neden?
-



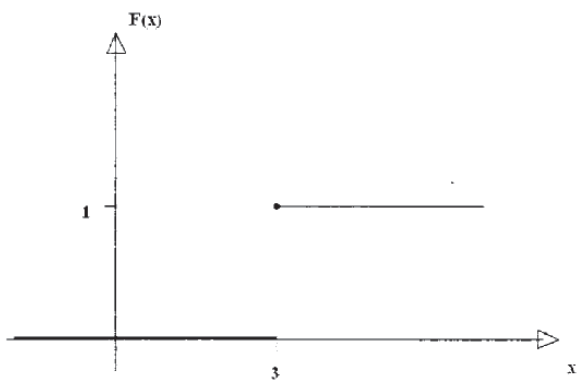
b)



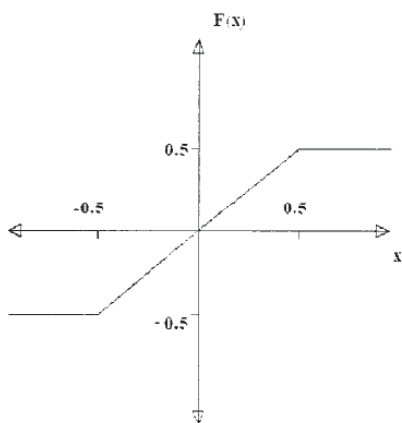
c)



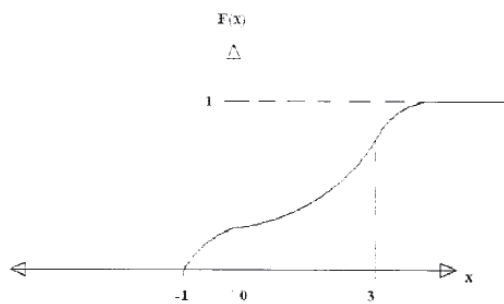
d)



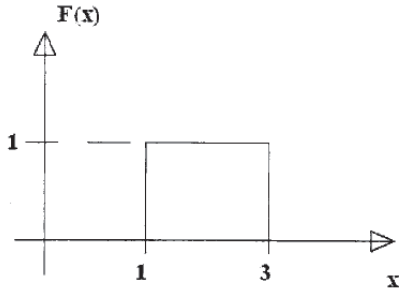
e)



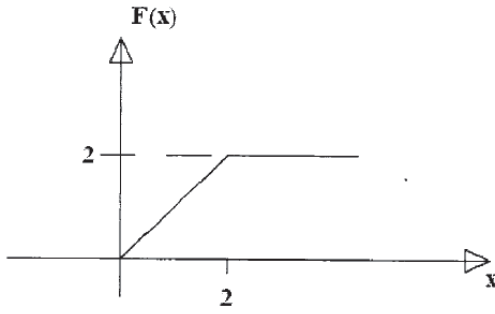
f)



g)



h)



- 3) Üretilen bir direncin üzerinde gösterilen hata değerinin üzerinde olması ihtimali $p=0.02$ dir. Bu durumda üretim bandından rasgele 10 tane direnç seçtiğimizi düşünelim.

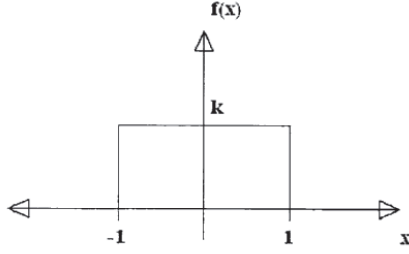
$X(k)$: k tane direncin bozuk olması rastlantı değişkeni olsun ve bu rastlantı değişkeni;

$$X(k) = f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 2 \\ 2, & 2 < k \leq 5 \\ 3, & 5 < k \leq 8 \\ 4, & 8 < k \leq 10 \end{cases} \text{ değerlerini alsın.}$$

a) $P[x=j]$ yi $j=1,2,3,4$ için hesaplayın.

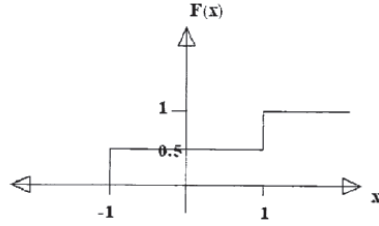
b) Olasılık dağılım fonksiyonu (PDF) $F(x)$ 'i çizin.

4) Olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) aşağıda verilen fonksiyon için;



- k 'yi bulunuz.
- $E[x]$ 'i bulunuz.
- Varyansı bulunuz. (σ^2)
- Olasılık dağılım fonksiyonunu (PDF) bulunuz.
- $P(0 < X \leq 1)$ olasılığını bulunuz.

5) Aşağıda PDF i verilen X rastlantı değişkeni için,



- Olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.
- $E[x]$ i bulunuz.
- Varyansı (σ^2) bulunuz.
- $P(0 < X \leq 1)$ olasılığını bulunuz.

CEVAPLAR

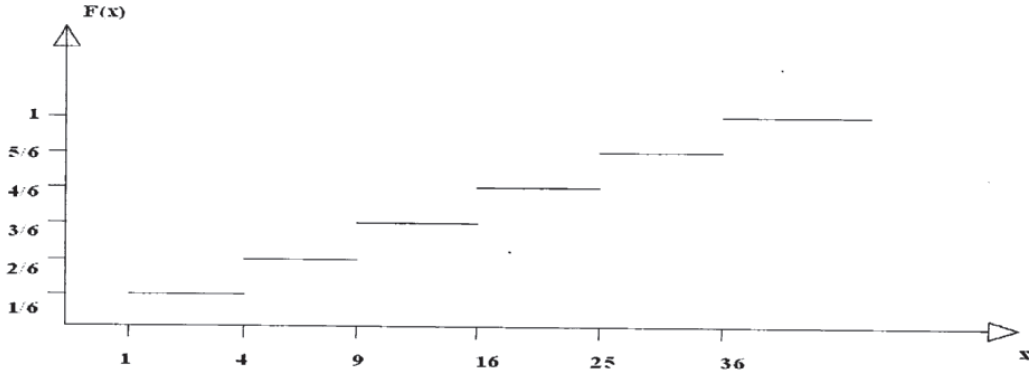
1) X raslantı değişkeni eşit olasılıklarla (1/16) 1,4,9,16,25,36 değerlerini alacaktır. Gerekli fonksiyon noktalarının olasılık değerlerini bulalım.

$$F(0)=P(X\leq 0)=0$$

$$F(1)=P(X\leq 1)=1/6$$

$$F(4)=P(X\leq 4)=1/6+1/6=2/6 \text{ [yani ya 1 yada 2 gelmesi ihtimali]}$$

$$F(36)=P(X\leq 36)=1$$



$$b) F(12)=4/6$$

$$c) P(5 < X \leq 7)=F(7)-F(5)=2/6-2/6=0$$

$$d) P(7 < X \leq 11)=F(11)-F(7)=3/6-2/6=1/6$$

2) d ve f Őıklarındakiler geçerlidir. Diğerleri F(x) olamaz

3) Burada direncin belirtilen hata değerinin üzerinde ıkmasını bernoulli kuralını kullanarak hesaplayabiliriz.

X(1) => 2 den az direnç hatalı olmalı, yani;

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^2 b(i, 10; 0.02) &= \sum_{i=0}^2 \binom{10}{i} (0.02)^i (0.98)^{10-i} \\
&= \binom{10}{0} (0.02)^0 (0.98)^{10} + \binom{10}{1} (0.02)^1 (0.98)^9 + \binom{10}{2} (0.02)^2 (0.98)^8 \\
&= 0.817 + 0.166 + 0.015 \\
&= 0.998
\end{aligned}$$

X(2), X(3) ve X(4) de bulunup fonksiyon çizilir.

4)

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \Rightarrow \int_{-1}^1 k dx = 1 \Rightarrow kx \Big|_{-1}^1 = 1 \Rightarrow 2k = 1, \quad k = 1/2$$

$$b) E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow \bar{x} = 0$$

$$c) \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$d) -\infty < x < -1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(r) dr = \int_{-\infty}^x 0 dr = 0$$

$$-1 < x < 1 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(r) dr = \int_{-\infty}^{-1} 0 dr + \int_{-1}^x \frac{1}{2} dr = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

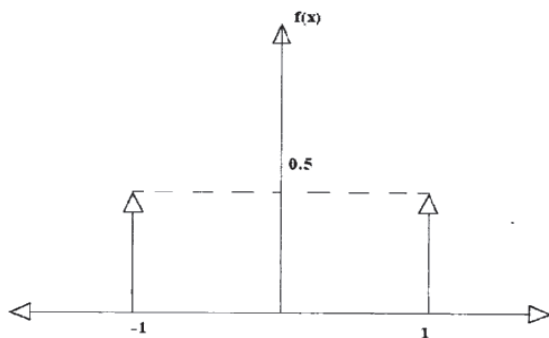
$$1 < x < \infty \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(r) dr = \int_{-\infty}^{-1} 0 dr + \int_{-1}^1 \frac{1}{2} dr + \int_1^{\infty} 0 dr = 1$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & , -\infty < x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & , -1 < x \leq 1 \\ 1 & , x \geq \infty \end{cases}$$

$$e) P(0 < x \leq 1) = F(1) - F(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5)

a)



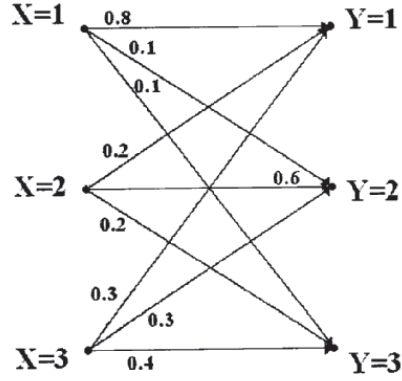
$$b) E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0.5[\delta(x-1) + \delta(x+1)]x = 0.5 - 0.5 = 0$$

$$c) \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 0.5[\delta(x-1) + \delta(x+1)]dx = 0.5 + 0.5 = 1$$

$$d) P(0 < x \leq 1) = F(1) - F(0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

Cözümlü Set-2

1)



Yukarıdaki şekilde gösterilen 3 sembolün (1,2 ve 3) iletildiği bir haberleşme kanalında 3 ile 2 aynı oranda 1 ise bunlardan 3 kat daha fazla sıklıkla gönderiliyor. $P[Y=1 | X=1]=0.8$ $P[Y=2 | X=1]=0.1$ $P[Y=3 | X=1]=0.1$

Buna göre alıcıda $Y=1$ alındığına göre 1 gönderilmiş olma olasılığı nedir?

2) Üretilen bir direncin üzerinde gösterilen hata değerinin üzerinde olması ihtimali 0.02 dir. bu durumda üretim bandından rasgele 3 tane direnç seçtiğimizi düşünelim. X rastgele değişkeni aşağıdaki şekilde tanımlandığına göre;

$X(k)$: k tane direncin bozuk olması

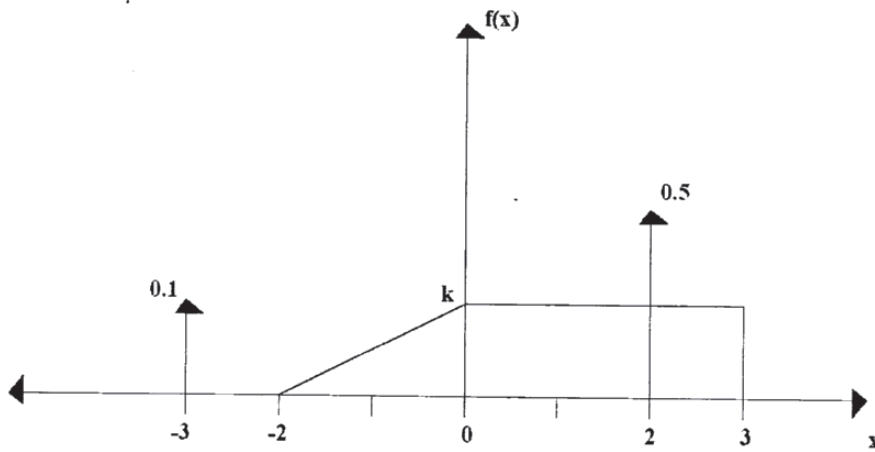
$$X(k) = \begin{cases} 0 & 0 \leq k < 1 \\ 1 & 1 \leq k < 2 \\ 2 & 2 \leq k < 3 \\ 3 & k = 3 \end{cases}$$

a) $P[x=j]$ yi hesaplayın, $j=0,1,2,3$

b) $F(x)$ 'i çizin.

c) $f(x)$ 'i çizin.

3)



Yukarıda X rastlantı değişkeninin pdf i verilmiştir. Buna göre;

- $k=?$
- $P[X=2]=?$
- $P[X=1]=?$
- $P[-2 \leq X < 0]=?$
- $P[-3 \leq X \leq -2]=?$
- $P[-3 < X \leq -2]=?$
- $E[X]=?$
- $\sigma^2 = ?$
- $F(1)=?$
- $F(X)'$ i çizin

4) Kullanmakta olduğumuz radyo için bir pil aldığınızı ve bu pilin ömrünün (gün olarak) X rastlantı değişkeni ile değiştiğini düşünelim. Bu rastlantı değişkeninin pdf i $f_X(x) = ke^{-x/2}$, $x \in (0, \infty)$ şeklinde verilsin.

- $k=?$
- $P(X \geq t)$ için bir ifade elde ediniz.
- $P(X \geq t+s | X \geq t)$ yi bulunuz. Bu fonksiyonu nasıl yorumlarsınız?
- Pilinizi ilk aldığınızda 10 gün ömrünün olması, 1 ay kullandıktan sonra 10 gün daha ömrünün kalması ve 1 yıl kullandıktan sonra 10 gün daha ömrünün kalması ihtimalleri arasında büyüklük küçüklük açısından nasıl bir ilişki vardır?

CEVAPLAR

- $P[X=1]=0.6$, $P[X=2]=0.2$, $P[X=3]=0.2$
 $P[X=1 | Y=1]=?$

$$P[X=1|Y=1] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{P[Y=1|X=1] * P[X=1]}{P[Y=1|X=1] * P[X=1] + P[Y=1|X=2] * P[X=2] + P[Y=1|X=3] * P[X=3]} \\ &= \frac{0.8 * 0.6}{0.8 * 0.6 + 0.2 * 0.2 + 0.3 * 0.2} = \frac{0.8 * 0.6}{0.48 + 0.04 + 0.06} = \frac{0.48}{0.58} \end{aligned}$$

2)

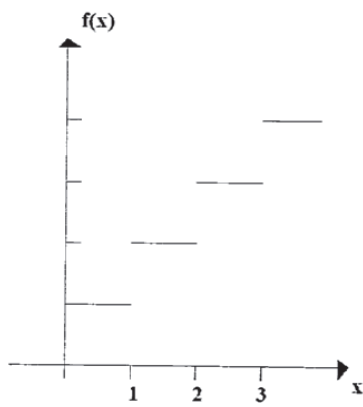
$$a) P[X=0] = \binom{3}{0} (0.02)^0 * (0.98)^3 = (0.98)^3$$

$$P[X=1] = \binom{3}{1} (0.02)^1 * (0.98)^2$$

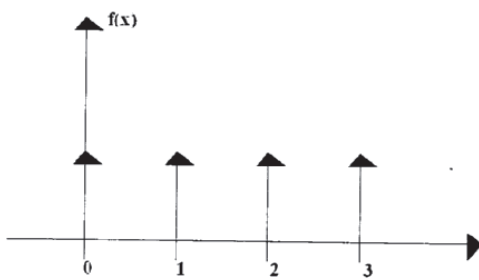
$$P[X=2] = \binom{3}{2} (0.02)^2 * (0.98)^1$$

$$P[X=3] = \binom{3}{3} (0.02)^3 * (0.98)^0 = (0.02)^3 = 8 * 10^{-6}$$

b)



c)



3)

a)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 &\Rightarrow \int_{-3}^{-3} 0.1 \delta(x+3) dx + \int_{-2}^0 \frac{k}{2} (x+2) dx + \int_0^3 k dx + \int_2^2 0.5 \delta(x-2) dx \\ &= 0.1 + \frac{k}{2} \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^0 + kx \Big|_0^3 + 0.5 \\ &= 0.6 + \frac{k}{2} \left(0 - \left(\frac{4}{2} - 4 \right) \right) + 3k \\ &= 0.6 + \frac{k}{2} (2) + 3k = 0.6 + 4k = 1 \Rightarrow k = 0.1\end{aligned}$$

b) $P[X=2]=0.5$

c) $P[X=1]=0$

d) $P[-2 \leq X < 0] = \text{Üçgenin Alanı} = (2 \cdot 0.1) / 2 = 0.1$

e) $P[-3 \leq X \leq -2] = P[X=-3] = 0.1$

f) $P[-3 < X \leq -2] = 0$

g)

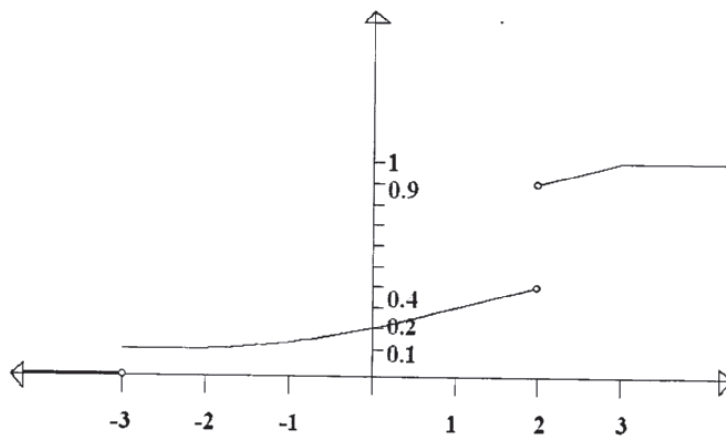
$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0.1 \int_{-3}^{-3} x \delta(x+3) dx + \int_{-2}^0 0.05x(x+2) dx + \int_0^3 0.1x dx + \int_2^2 0.5x \delta(x-2) dx \\ &= 0.1x \Big|_{x=-3}^{-3} + 0.05 \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + 0.05x^2 \Big|_0^3 + 0.5x \Big|_{x=2}^2 \\ &= -0.3 + 0.05 \left[0 - \left(\frac{-8}{3} + 4 \right) \right] + 0.05(9-0) + 1 \\ &= 0.7 - \frac{0.2}{3} + 0.45 = 1.15 - \frac{0.2}{3} = \frac{3.25}{3}\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 0.1 \int_{-3}^3 x^2 \delta(x+3) + \int_{-2}^0 0.05x^2(x+2) + \int_0^3 0.1x^2 + \int_2^3 0.5x^2 d(x-2) \\
 &= 0.1x^2 \Big|_{x=-3} + 0.05 \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^0 + \frac{0.1x^3}{3} \Big|_0^3 + 0.5x^2 \Big|_{x=2} \\
 &= 0.9 + 0.05 \left[0 - \left(4 - \frac{16}{3} \right) \right] + 0.9 + 2 \\
 &= 3.8 + \frac{0.2}{3} = \frac{11.2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{11.2}{3} - \left(\frac{3.25}{3} \right)^2 = \frac{11.2}{3} - \frac{10.5625}{9} = \frac{23.0375}{9}$$

i)



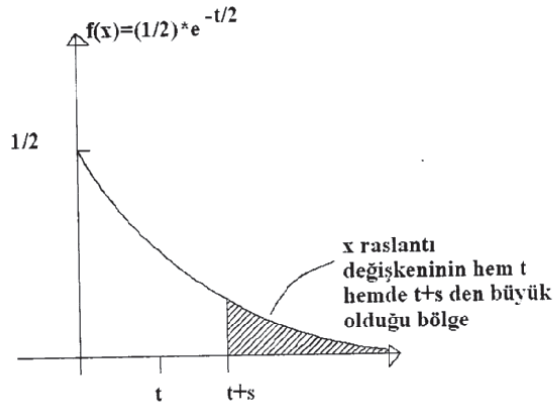
j) $F(1) = 0.3$

4)

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} k e^{-x/2} dx = 1 \Rightarrow -2k e^{-x/2} \Big|_0^{\infty} = 1 \Rightarrow -2k [e^{-\infty/2} - e^{-0/2}] = 1 \Rightarrow 2k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

$$b) P(X \geq t) = \int_t^{\infty} f(x) dx = \int_t^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} = -e^{-x/2} \Big|_t^{\infty} = e^{-\infty/2} + e^{-t/2} \Rightarrow P(X \geq t) = e^{-t/2}$$

c)



$$P(X \geq t+s | X \geq t) = \frac{P(X \geq t+s | X \geq t)}{P(X \geq t)}$$

$$P(X \geq t+s, X \geq t) = P(X \geq t+s) \Rightarrow P(X \geq t+s | X \geq t) = \frac{P(X \geq t+s)}{P(X \geq t)} = \frac{e^{-(t+s)/2}}{e^{-t/2}} = e^{-s/2}$$

d) Hepsi Eşit (e^{-5})

Cözümlü Set-3

1) X ve Y rastlantı değişkenlerinin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} c_{xy}, & x \in \{1,2,4\} \text{ ve } y \in \{1,3\} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak veriliyor. Buna göre,

- $c=?$
- $P(Y<X)=?$
- $P(Y>X)=?$
- $P(Y=X)=?$
- $P(Y=3)=?$
- $f_x(X)=?, f_y(y)=?$
- $E[X]=?, E[Y]=?$
- $\sigma_x^2 = ?, \sigma_y^2 = ?$

Cevap-1:

6 tane 0'dan farklı olasılığı olan durum var. Bu durumlar; (1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (4,1) ve (4,3).

$\iint f_{xy} dx dy = 1$ olmalı. Buradaki olaylar için integral toplama dönüşeceğinden;

$$\sum \sum f_{xy}(x,y) = 1 \text{ olmalı.}$$

- $c[1.1+1.3+2.1+2.3+4.1+4.3]=1 \Rightarrow c=1/28$
- Y<X olan 3 örnek noktası var.

$$P(Y<X) = P(\{2,1\}) + P(\{4,1\}) + P(\{4,3\}) = \frac{1}{28}(2.1 + 4.1 + 4.3) = \frac{18}{28}$$

- Y>X olan 2 örnek noktası var.

$$P(Y>X) = P(\{1,3\}) + P(\{2,3\}) = \frac{1}{28}(1.3 + 2.3) = \frac{9}{28}$$

- Y=X olan tek örnek noktası var.

$$P(Y=X) = P(\{1,1\}) = \frac{1}{28}(1.1) = \frac{1}{28}$$

- y=3 olan 3 örnek noktası var.

$$P(Y=3) = P(\{1,3\}) + P(\{2,3\}) + P(\{4,3\}) = \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{12}{28} = \frac{21}{28}$$

-

$$f_x(x) = \begin{cases} 1/7, & x=1 \\ 2/7, & x=2 \\ 4/7, & x=4 \\ 0, & \text{diger} \end{cases} \quad f_y(y) = \begin{cases} 1/4, & y=1 \\ 3/4, & y=3 \\ 0, & \text{diger} \end{cases}$$

Örneğin;

$$X=2 \text{ ise } f_x(2) = P(\{2,1\}) + P(\{2,3\}) = \frac{8}{28}$$

$$g) E[X]=3 \quad E[Y]=5/2$$

$$h) \sigma_x^2 = \frac{10}{7}, \sigma_y^2 = \frac{5}{8}$$

g ve h şıklarının çözümleri için elimizde $f_x(x)$ ve $f_y(y)$ olduğundan artık bu değerleri hesaplamak çok kolay olmalı !!! (Çözümü size bırakıyorum.)

2) X ve Y rastlantı değişkenleri için;

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} cx^2 \sqrt{y}, & x = -5, -4, \dots, 4, 5 \text{ ve } y = 0, 1, \dots, 10 \\ 0, & \text{diger} \end{cases}$$

veriliyor. Buna göre $E[XY^3]=?$

Cevap 2:

$$E[XY^3] = \sum_{x=-5}^5 \sum_{y=0}^{10} xy^3 f_{xy}(x,y) = 0$$

3) X ve Y $\{1,2,3\}$ değerlerini alan düzgün yoğunluk fonksiyonuna sahip rastlantı değişkenleri olsun.

Buna göre;

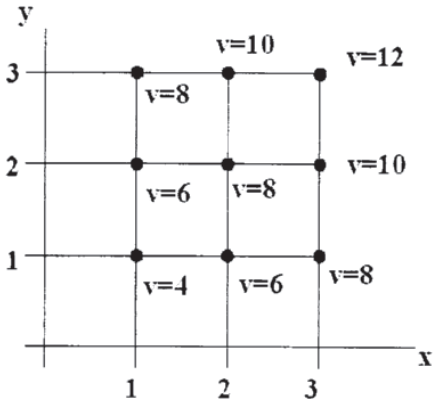
$$a) V=2X+2Y \Rightarrow f_v(v)=?$$

$$b) W=X-Y \Rightarrow f_w(w)=?$$

Cevap 3:

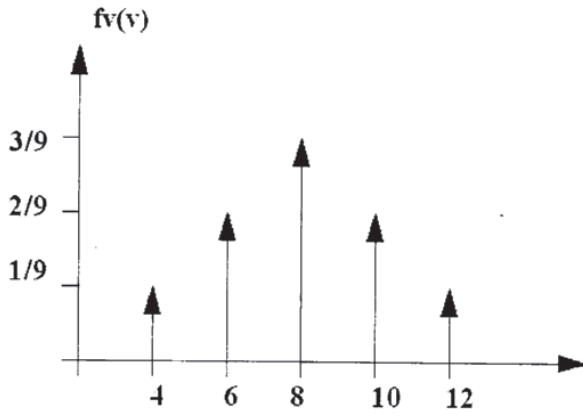
Bu probleme iki çözüm şekliyle yaklaşılabilir.

a-1)



X ve Y düzgün dağılıma sahip olduklarında (yani her 3 değeri olma olasılıkları eşit olduğunda v rastlantı değişkeninde bu 9 durumu alma olasılığı eşit yani $1/9$ olacaktır.)

Buna göre ;



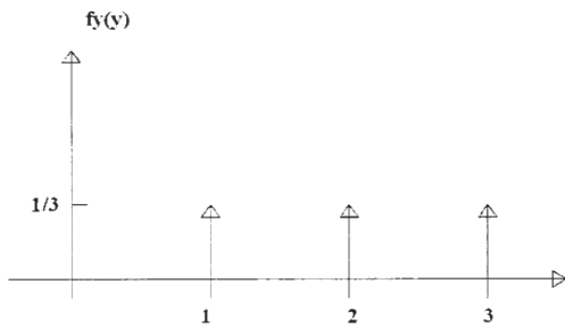
Örneğin;

4 değeri 1 kere alınabildiğinden $1/9$

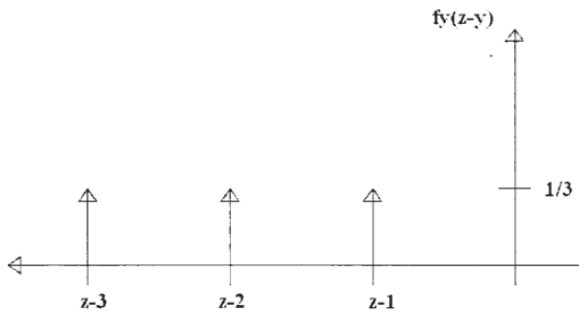
8 değeri 3 kere alınabildiğinden $3/9$

a-2) Diğer Çözüm yolu;

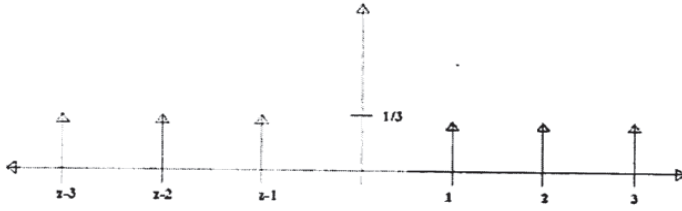
Konvolüsyon almak



Önce $Z=X+Y$ yi bulalım



1) $Z < 2$



$$fz(z)=0, z < 2$$

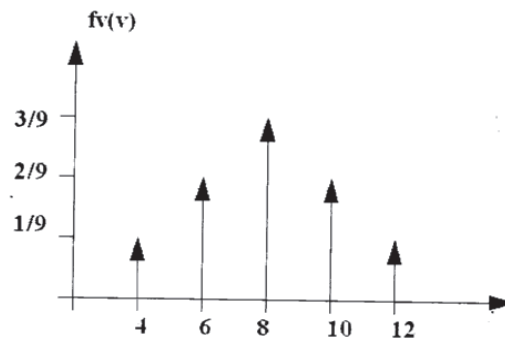
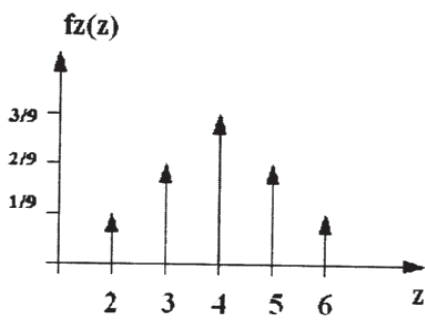
ii) $z=2$ bu durumda sadece $z-1$ ve 1 üst üste gelecek $fz(z)=\frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $z=2$

$z=3$ $z-1$ ve 2 , $z-2$ ve 1 üst üste gelecek $fz(z)=\frac{1}{3} * \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$, $z=3$

$z=4$ $z-1$ ve 3 , $z-2$ ve 2 , $z-3$ ve 1 üst üste gelecek $fz(z)=\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9}$, $z=4$

benzer şekilde, $fz(z)=\frac{2}{9}$, $z=5$ ve $fz(z)=\frac{1}{9}$, $z=6$

$$V=2(X+Y)=2Z \text{ olduğundan}$$



b şıkkı benzer şekilde çözülür.

4) X ve Y rasgele değişkenleri için;

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & x \in [0,2] \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad \text{ve} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2 - 2y, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad \text{ise,}$$

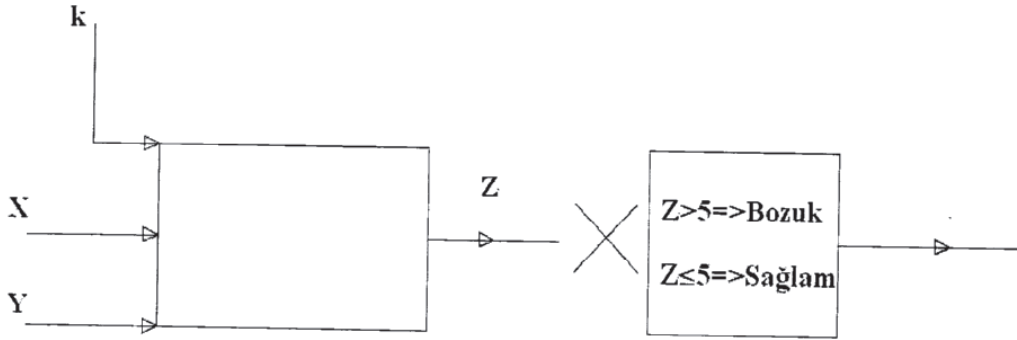
$W=X+Y$ ile verilen W rastlantı değişkeni için $f_W(w)$ yi bulunuz.

Cevap 4:

Konvolüsyon olarak cevap aşağıdaki gibi bulunur.

$$f_W(w) = \begin{cases} 2w - \frac{3}{2}w^2 + \frac{1}{6}w^3, & 0 \leq w \leq 1 \\ \frac{7}{6} - \frac{1}{2}w, & 1 \leq w \leq 2 \\ \frac{9}{2} - \frac{9}{2}w + \frac{3}{2}w^2 - \frac{1}{6}w^3, & 2 \leq w \leq 3 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

5) X $[0,2]$ aralığında Y ise $[0,2]$ aralığında Uniform dağılıma sahip rastlantı değişkenleri olsun. Buna göre;



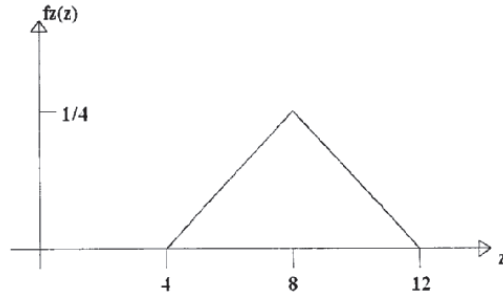
yukarıdaki sistemde k değerine sahip dirençler kararlılık testinden geçiriliyorlar ve sistem çıkışında $Z > 5$ olursa bozuk, $Z \leq 5$ olursa sağlam olduklarına karar veriliyor. k girişi sıcaklık tolerans değeri olup $k=2$ olarak biliniyor, sistemde bunu 50°C de test ederek çıkışa $2k$ olacak şekilde verilmesi tasarlanmış. Ancak X ve Y gürültüleri yüzünden sistem çıkışı $Z=2(k+X+Y)$ oluyor. Buna göre sisteme giren dirençlerin tolerans değerlerinin sistem çıkışındaki ortalama değeri ve giren bir direncin bozuk olma ihtimali nedir? ($P(Z > 5) = ?$)

NOT: X ve Y bağımsız.

Cevap 5:

Önce X ve Y nin konvolüsyonunu alarak $V=X+Y$ yi bulmak için sadece V rastlantı değişkeninin başlangıç bitir değerini 2 ile öteleyin sonra $Z=2W$ rastlantı değişkenini bulun.

Sonuç;



Burada $P(z \geq 5) = \frac{31}{32}$

$$\begin{aligned} E[z] &= \frac{1}{16} \int_4^8 z(z-4) dz + \frac{1}{16} \int_8^{12} (-z+12) dz \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{z^3}{3} - 2z^2 \right]_4^8 + \left[\frac{-z^3}{3} + 6z^2 \right]_8^{12} \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{512}{3} - 128 - \left(\frac{64}{3} - 32 \right) + \left(\frac{-1728}{3} + 864 - \left(\frac{-512}{3} + 384 \right) \right) \right] \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{128}{3} + \frac{32}{3} + \frac{864}{3} + \frac{640}{3} \right] = 8 \end{aligned}$$

$E[z] = 8$ Yada;

$$E[2(k+x+z)] = 2[E[k] + E[X] + E[Y]] = 2[2+1+1] = 8$$

Cözümlü Set-4

1)

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp(-(x^2 + y^2)/2\sigma^2)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= X \cos \theta + Y \sin \theta \\ W &= X \sin \theta + Y \cos \theta \end{aligned} \right\} f_{vw}(v, w) = ?$$

$$f_{vw}(v, w) = |\tilde{j}| f_{xy}(x, y) \left| \begin{array}{l} x = \phi(v, w) \\ y = \varphi(v, w) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \cos \theta \quad v &= x \cos^2 \theta + Y \sin \theta \cos \theta & \sin \theta \quad v &= x \cos \theta \sin \theta + Y \sin^2 \theta \\ \sin \theta \quad w &= x \sin^2 \theta - Y \sin \theta \cos \theta & -\cos \theta \quad w &= -x \sin \theta \cos \theta + Y \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= v \cos \theta + w \sin \theta & y &= v \sin \theta - w \cos \theta \\ x &= \phi(v, w) & y &= \varphi(v, w) \end{aligned}$$

$$|\tilde{j}| = \begin{vmatrix} \partial \phi / \partial v & \partial \phi / \partial w \\ \partial \varphi / \partial v & \partial \varphi / \partial w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix} = |-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta| = 1$$

$$f_{vw}(v, w) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp(-[X^2 \cos^2 \theta + Y^2 \sin^2 \theta + 2XY \sin \theta \cos \theta + X^2 \sin^2 \theta + Y^2 \cos^2 \theta - 2XY \sin \theta \cos \theta] / 2\sigma^2)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp(-(v^2 + w^2) / 2\sigma^2)$$

2)

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2 \sqrt{1-\rho^2}} (x^2 - 2\rho xy + y^2)\right]$$

$$z = ax + by$$

$$w = cx + dy$$

a) $f_z(w(z, w)) = ?$

b) a, b, c, d nin hangi kombinasyonu için z ve w bağımsız olur.

$$cZ = acX + bcY$$

$$aW = acX + adY$$

$$dZ = adX + bdY$$

$$bW = bcX + bdY$$

$$cZ - aW = Y(bc - ad)$$

$$dZ - bW = X(ad - bc)$$

$$Y = \frac{cZ - aW}{bc - ad}$$

$$X = \frac{dZ - bW}{ad - bc} = \frac{bW - dZ}{bc - ad}$$

$$Y = \varphi(z, w)$$

$$X = \phi(z, w)$$

$$\tilde{j} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial z} & \frac{\partial \phi}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -d & b \\ bc-ad & bc-ad \\ c & -a \\ bc-ad & bc-ad \end{vmatrix} = \frac{1}{bc-ad} (ad-bc) = -1$$

$$|\tilde{j}| = 1$$

$$\begin{aligned} f_{vw}(v, w) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} * \frac{1}{bc-ad} \left(d^2z^2 + b^2w^2 - 2bdwz + c^2z^2 + a^2w^2 - 2acwz \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} * \frac{1}{bc-ad} \left[z^2(c^2d^2) + w^2(b^2+a^2) - 2wz(ac+bd) \right] \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)} * \frac{1}{bc-ad} \left[z^2(c^2+d^2-2\rho cd) + w^2(b^2+a^2-2\rho ab) \right] \right] \end{aligned}$$

b) $ac+bd = \rho(bc+ad) \Rightarrow$ bağımsız normal olur.

3) X ve Y bağımsız değişkenleri $X \sim [0, 3]$ ve $Y \sim [0, 4]$ Uniform dağılıma sahipler. $Z=X+Y$ şeklinde tanımlandığına göre

a) $\phi_x(w) = ?$

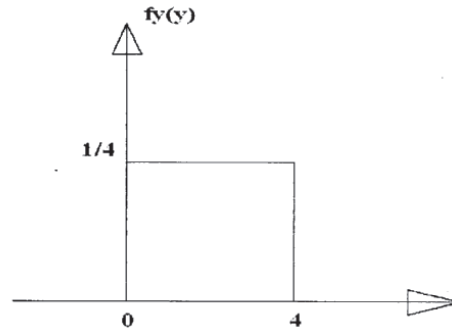
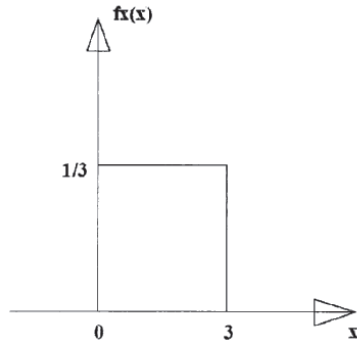
b) $\phi_y(w) = ?$

c) $\phi_z(w) = ?$

d) $f_z(z) = ?$

e) $E[z] = ?$

f) $\sigma_z^2 = ?$



a)

$$\phi_x(\omega) = \int_0^3 \frac{1}{3} e^{-j\omega x} dx = \frac{1}{3j\omega} e^{-j\omega x} \Big|_0^3 = \frac{1}{3j\omega} (e^{-3j\omega} - 1) = \frac{e^{-\frac{3}{2}j\omega}}{2j} \left(\frac{e^{\frac{3}{2}j\omega} - e^{-\frac{3}{2}j\omega}}{2j} \right) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\frac{3}{2}\omega}$$

$$\phi_x(\omega) = e^{-\frac{3}{2}j\omega} * \text{sinc}\left(\frac{3}{2}\omega\right)$$

b) Benzer şekilde $\phi_y(\omega) = e^{-2j\omega} \text{sinc}(2\omega)$

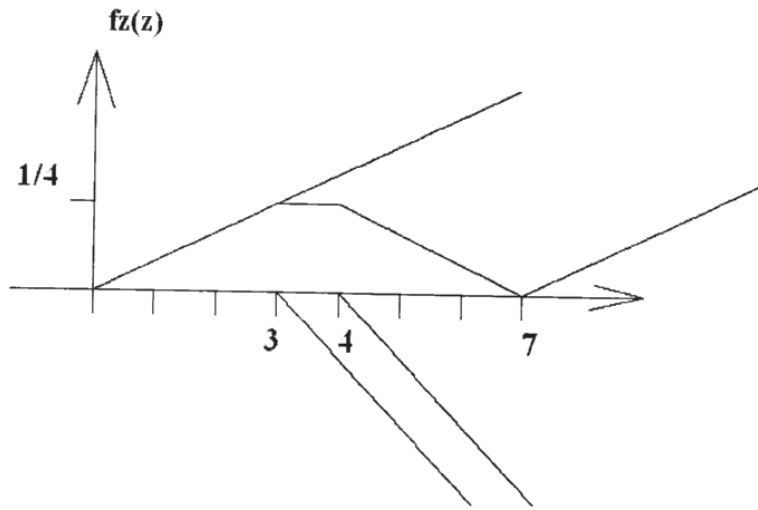
c)

$$\begin{aligned}\phi_z(w) &= \phi_x(w) * \phi_y(w) = e^{\frac{3}{2}jw} \operatorname{sinc}\left(\frac{3}{2}w\right) e^{2jw} \operatorname{sinc}(2w) = e^{\frac{7}{2}jw} \operatorname{sinc}\left(\frac{3}{2}w\right) \operatorname{sinc}(2w) \\ &= e^{\frac{7}{2}jw} \frac{\sin(2w) \sin\left(\frac{3}{2}w\right)}{2w \frac{3}{2}w} = \frac{e^{\frac{7}{2}jw}}{3w^2} \frac{1}{2} \left[\cos \frac{w}{2} - \cos \frac{7}{2}w \right] = \frac{e^{\frac{7}{2}jw}}{6w^2} \left[\frac{e^{j\frac{w}{2}} + e^{-j\frac{w}{2}}}{2} - \frac{e^{j\frac{7}{2}w} + e^{-j\frac{7}{2}w}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{12w^2} [e^{j4w} + e^{j3w} - e^{j7w} - 1]\end{aligned}$$

$$d) u(t)te^{-\alpha t} \xrightarrow{F} \frac{1}{(\alpha + jw)^2} \Rightarrow -u(t)t \xrightarrow{F} \frac{1}{w^2} \quad (\alpha = 0)$$

$$f(t - t_0) \rightarrow F(w)e^{jwt_0} \quad (\text{Tabloda farklı "w" yerine "-w" koy})$$

$$\frac{1}{12w^2} [e^{j4w} + e^{j3w} - e^{j7w} - 1] \xrightarrow{F} \frac{1}{12} [-(t-4)u(t-4) - (t-3)u(t-3) + (t-7)u(t-7) + u(t)t]$$



e)

$$E[z] = \frac{1}{j} \frac{d}{dw} \phi_z(w) \Big|_{w=0} \Rightarrow \frac{d}{dw} \left[\frac{1}{12w^2} (e^{j4w} + e^{j3w} - e^{j7w} - 1) + \frac{1}{12w^2} (j4e^{j4w} + 3je^{j3w} - j7e^{j7w}) \right]$$

$$E[z] = E[X] + E[Y] = 1.5 + 2 = 3.5$$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \frac{9}{12} + \frac{16}{12} = \frac{25}{12}$$

4- $\phi_x(w) = \frac{1}{2} \left[\frac{12-a}{4-jw} + \frac{a-6}{2-jw} \right]$ şeklinde verilmiş ise;

a) a için bir değer bulunuz.

b) $P(x \geq 0.5) = ?$

c) $f_z(z)$ yi kullanarak $E[z] = ?$

d) $E[z] = ?$ ($\phi_x(w)$ yi kullanarak.)

e) $\sigma_z^2 = ?$ ($f_z(z)$ 'den)

f) $\sigma_z^2 = ?$ ($Dx(w)$ den)

a) $\phi_x(w) = E(e^{jwx})$ olduğundan w yerine 0 koyarsak;

$E[e^0] = E[1] = 1$ olmalı

$$\phi_x(0) = \frac{1}{2} \left[\frac{12-a}{4} + \frac{a-6}{2} \right] = 1 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow \phi_x(w) = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{4-jw} + \frac{2}{2-jw} \right]$$

b) $f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(w) e^{-jwx} dw$ tablodan $u(t)e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{\alpha + jw}$

$$w \rightarrow -w \text{ bizim için } u(t)e^{-\alpha t} \leftrightarrow \frac{1}{\alpha - jw}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-4x} + e^{-2x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$

$$P(x \geq 0.5) = \int_{0.5}^{\infty} 2e^{-4x} + e^{-2x} dx = \left. \frac{-e^{-4x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{2} \right|_{0.5}^{\infty} = \frac{1}{2}(e^{-2} + e^{-1})$$

c)

$$E[x] = \int_0^{\infty} x(2e^{-4x} + e^{-2x}) dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-4x} dx + \int_0^{\infty} xe^{-2x} dx =$$

$$u = x \quad dv = e^{-4x} \Rightarrow$$

$$du = dx \quad v = \frac{e^{-4x}}{-4}$$

$$\int_0^{\infty} 2xe^{-4x} dx = 2 \left[\frac{xe^{-4x}}{-4} - \int \frac{e^{-4x}}{-4} dx \right] = 2 \left[\frac{xe^{-4x}}{-4} - \frac{e^{-4x}}{16} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{8}$$

Aynı şekilde diğer taraftan da $\frac{2}{8}$ gelecek ve $E[z] = \frac{3}{8}$

d)

$$E[x] = \frac{1}{j} \frac{d}{dw} \phi_x(w) \Big|_{w=0} = \frac{1}{j} \left[\frac{2j}{(4-jw)^2} + \frac{j}{(2-jw)^2} \right] \Big|_{w=0}$$

$$= \frac{2}{16} + \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

e) $E[x^2] = \int_0^{\infty} x^2 (2e^{-4x} + e^{-2x}) = \frac{5}{16}$ (dönüşümler yapıldığında)

$$\sigma_x^2 = \frac{5}{16} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{11}{64}$$

f)

$$E[x^2] = \frac{1}{j^2} \frac{d^2}{dw^2} \phi_x(w) \Big|_{w=0} = \frac{1}{j^2} \left(\frac{4j^2}{(4-jw)^3} + \frac{2j^2}{(2-jw)^3} \right) \Big|_{w=0}$$

$$= \frac{4}{64} + \frac{2}{8} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

$$\sigma^2 = \frac{11}{64}$$

Örnek

5)

$X \sim U(0,1)$, $Y \sim U(0,1)$ ve X ve Y bağımsız olsun.

$Z = X + Y$

$W = X - Y$ olsun. z ve w nun bağımlı fakat ilişkisiz olduğunu göster.

$$x = \frac{z+w}{2}, y = \frac{z-w}{2} \text{ olur.}$$

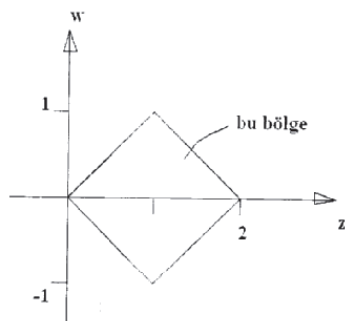
$$0 < z < 2, -1 < w < 1$$

$$z+w \leq 2, z-w \leq 2 \quad z > |w|$$

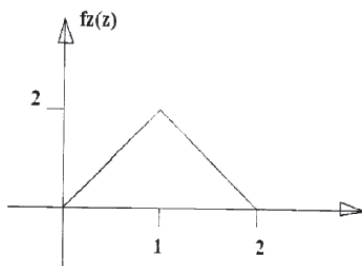
$$|\tilde{f}(z, w)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f_{zw}(z, w) = |\tilde{f}(z, w)| f_{xy}(x_i, y_i)$$

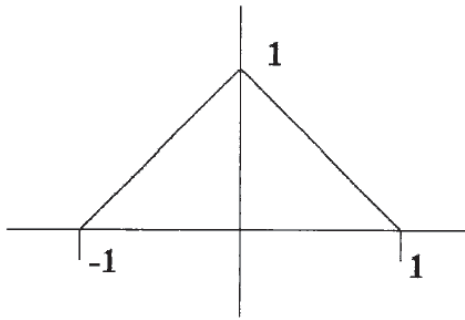
$$f_{zw}(z, w) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , 0 < z < 2, \quad -1 < w < 1, \quad z+w \leq 2, \quad z-w \leq 2 \quad |w| < 7 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$



$$f_z(z) = \int f_{zw}(z, w) dw = \begin{cases} \int_{-z}^z \frac{1}{2} dw = z & , 0 < z < 1 \\ \int_{z-2}^{z-1} \frac{1}{2} dw = 2-z & , 1 < z < 2 \end{cases}$$



$$f_w(w) = \int f_{zw}(z, w) dz = \int_{-w}^{2-w} dz = \begin{cases} 1-|w| & , -1 < w < 1 \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases}$$



Açıkca $f_{zw}(z, w) \neq f_z(z) * f_w(w)$

$$E[zw] = E[(x+y)(x-y)] = E[x^2] - E[y^2] = 0$$

$$E[w] = E[x-y] = 0 \quad E[z] = 1$$

$$\text{Cov}(z, w) = E[zw] - E[z]E[w] = 0$$

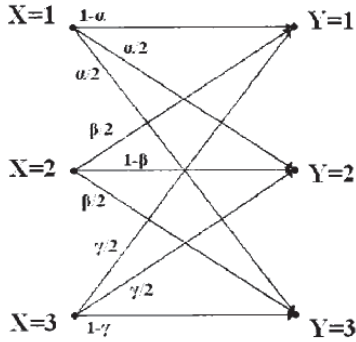
ÖDEV -1-

- 1) Bir torbadan 1 ile 9 arasında numaralandırılmış topların çekilerek oynandığı bir oyunda, çift sayı gelirse bir ödül kazanılıyor. Ödül kazanma olasılığı nedir?
- 2) Bir madeni para ile 3 kez arka arkaya yazı-tura atılıyor. Bu 3 atış sonucunda 2 tura ve 1 yazı elde etme olasılığı nedir?
- 3) Bir torbadan arka arkaya çekilen iki top deneyini ele alalım. Bu torbada 1 den 6 ya kadar numaralandırılmış toplar var.
 - a) Çekilen top torbaya geri konulmadığı durum için,
 - b) Çekilen top torbaya geri konulduğu durum için, Ω örnek uzayını tanımlayınız.
- 4) Bir torba 1 ile 10 arasında numaralandırılmış toplar içersin. A olayı 5 den küçük top çekme, B olayı da 3 ten büyük fakat 9 dan küçük top çekme olayı olsun. Buna göre aşağıdaki kümeleri oluşturun ve bu olayları kelimelerle ifade edin.
 - a) A^c
 - b) B^c
 - c) AB
 - d) AUB
 - e) AB^c
 - f) A^cUB^c
 - g) AB^cUA^cB
 - h) $ABUA^cB^c$
 - i) $(AUB)^c$
 - j) $(AB)^c$
- 5) 1,2 ve 3 nolu aksiyomları kullanarak aşağıdakileri gösterin,
 - a) $P[\emptyset]=0$
 - b) $P[AB^c]=P[A]-P[AB]$
 - c) $P[A]=1-P[A^c]$
- 6) Eğer $AB= \emptyset$ ise $P(A) \leq P(B^c)$ olduğunu gösterin
- 7) Bir TV yarışma oyununda 3 adet kapı bulunmaktadır ve bu kapılardan sadece 1 tanesinin arkasında ödül vardır. Yarışmacılardan kapılardan bir tanesini seçmesi istendikten sonra sunucu tarafından geri kalan kapılardan boş olanı açılıyor ve yarışmacıya seçtiği kapıyı şimdi değiştirmek isteyip istemediği soruluyor. Siz olsaydınız ne yapardınız? Yarışmacının seçtiği kapıyı değiştirmesi, şansını hangi yönde etkiler. Seçimini değiştirse yüzde kaç, değişmezse yüzde kaç ihtimalle kazanma şansı vardır?

ÖDEV 2

1) Bir zar iki kere atılıyor. İlk atışta 3 gelirse iki atış sonucunda toplamın 7 olma ihtimali nedir?

2)

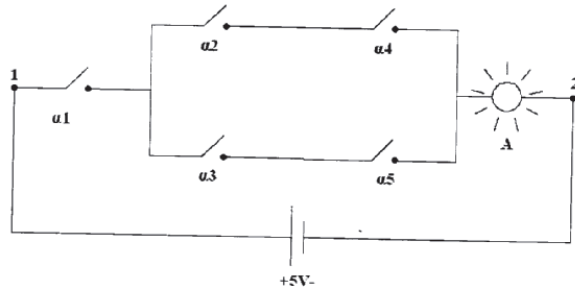


Yukarıdaki şekilde gösterilen 3 sembolün (1,2 ve 3) iletildiği bir haberleşme kanalında genelde (ortalama davranışlar göz önüne alındığında) 3, 2' den, 2' de 1' den 2 kat daha fazla sıklıkta gönderiliyor.

$P[Y=1|X=1]=1-\alpha$, $P[Y=2|X=1]=\alpha/2$, $P[Y=3|X=1]=\alpha/2$ olarak verilmiş ve diğer olabilecek ihtimallerle beraber şekil üzerinde gösterilmiştir. Burada $P[Y=1|X=1]$ 1 gönderildiğinde 1 alınması koşullu ihtimalidir. Buna göre, alıcı tarafta $Y=1$ alındığına göre 1 gönderilmiş olma ihtimali nedir?

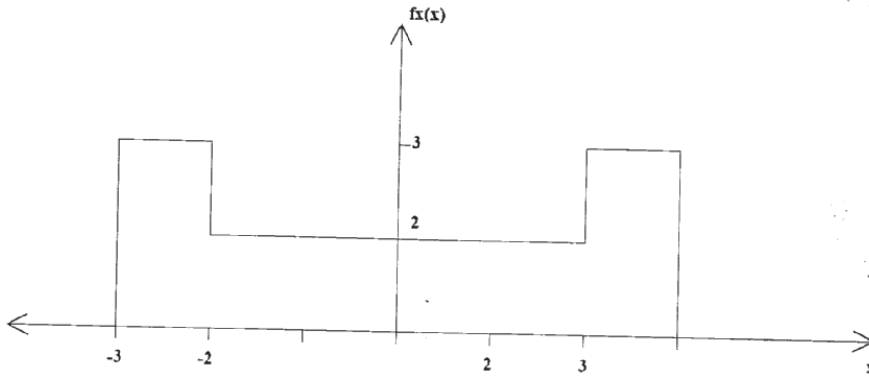
- 3) Bir torbada 2 kırmızı ve 3 beyaz top bulunmaktadır. Bu torbadan bir top çekilip rengi kaydediliyor ve yerine geri koyuluyor. Buna göre yapılan 4 çekim sonucunda en az 2 kırmızı top çekilmiş olma olasılığı nedir?
- 4) Bir çift zar 10 kere atılıyor. Bu zarların toplamlarının en az bir kere 7 olma ihtimali nedir?
- 5) Bir sınıfta 4 erkek ve 3 kız öğrenci vardır. Bu öğrenciler teker teker sınava alınıyorlar. Öğrencilerin bir erkek bir kız şeklinde giden bir sıralamayla sınava alınma olasılıkları nedir?
- 6) A ve B ayrık olaylar ise bağımsız olabilirlermi?
- 7) Tek sayıda (mesela 7 kişi) bir grup insan eşit sayıda iki takıma bölünmelerini (mesela 3 kişi) gerektiren bir oyun oynayacaklar. Artan kişinin hakem olmasına karar veriyorlar ve bu hakemin kim olacağını belirlemek için herkes yazı tura atıyor. Bu yazı tura atma işlemi sadece bir kişi hariç diğerlerinin attığı taraf aynı olana kadar (örneğin altısı yazı biri tura, yada altısı tura sadece biri yazı) devam ediyor. Farklı olanı atan hakem olarak belirleniyor. Buna göre ilk turda (yani ilk denemede) hakemin belirlenmesi olasılığı nedir? (oyuncuların sayısını 7 alarak problemi çözün.)

- 8) Anestezi de kullanılan otomatik bir nefes düzenleme aygıtı (B), P_B olasılıkla bozuluyor. Bu bozulma, izleme sistemi (M) bu bozukluğu algılamazsa, hastanın ölümüne sebep veriyor. İzleme sistemi (M) de P_M olasılığıyla bozuluyor. İki sistemin bozulmaları tamamen bağımsız olaylardır. Hastanenin profesörü eğer $P_M > P_B$ ise izleme cihazı kullanmanın tamamen gereksiz olduğunu savunuyor. Bu profesöre katılırmısınız. Yoksa ona bir olasılık kursu almasını mı tavsiye edersiniz? $P_M=0.1$ ve $P_B=0.05$ olarak cevabınızı destekleyici işlemi gösterin.
- 9) Aşağıdaki şekildeki sistemde 12 uçları arasında bağlanan 5V ' luk bir pille "A" ampülü yakılmak istenmektedir. Anahtarların herbiri için kapalı konumda olma ihtimali "p" dir ve hepsi birbirinden bağımsız çalışmaktadır. $p=0.4$ olarak lambanın yanma ihtimalini hesaplayınız.



ÖDEV-3

- 1) $Y=27X-13$ şeklinde tanımlanıyor. X değişkeninin pdf' i aşağıdaki şekilde verildiğine göre;



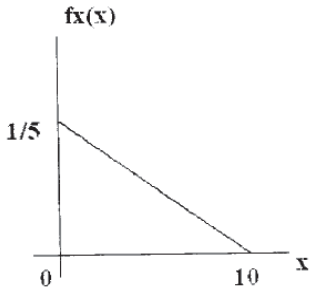
- a) $E[Y]=?$ (Cevap: -13)
b) $\sigma_y = ?$ (Cevap: $27\sqrt{46}$)
c) $P(Y>-13)$ (Cevap: 0.5)

2) $Y=X^2+3$ ve $X\approx[-2,2]$ aralığında düzgün dağılıma sahipse;

a) $E[Y]=?$ (Cevap: 13/3)

b) $\sigma_y = ?$ (Cevap: 7.88)

3) Bir LCD ekran üreticisi, istatistiksel bir çalışma sonucunda LCD ekranların ömrünün aşağıdaki şekilde gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna uyduğunu gözlemlemiştir. Buna göre bu fabrikanın ürettiği bir LCD ekran ortalama olarak kaç yıl ömre sahiptir?



(Cevap: 3.33 yıl)

ÖDEV-4

Soru 1)

$$V \triangleq g(X, Y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$W \triangleq h(X, Y) = f(x) = \begin{cases} \tan^{-1}(Y/X), & x > 0 \\ \tan^{-1}(Y/X) + \pi, & x < 0 \end{cases}$$

Rastlantı değişkenleri tanımlanmış olsunlar. Eğer; $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2)\right]$ verilmişse;

$$f_{VW}(v, w) = ?$$

***Bir önceki problemin modifiye edilmiş bir formunu göz önüne alalım. Burda;

$$V \triangleq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$W \triangleq Y/X$ şeklinde tanımlanmış olsunlar. Eğer; $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp[-(x^2 + y^2)/2\sigma^2]$ olarak tanımlanmış ise $f_{VW}(v, w)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu nedir?

Soru 2) X rastlantı değişkeni $N(1,1)$ şeklinde tanımlanmış olsun. bu durumda $Y=2X-3$ şeklinde tanımlanan yeni rastlantı değişkeni için $f_Y(y)=?$ $P(-2 < Y < 1)=?$

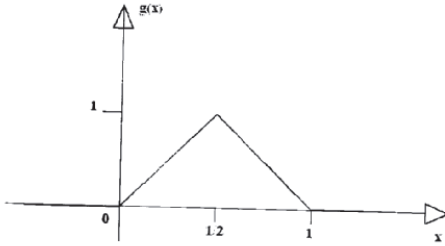
Soru 3) $Z \triangleq X^2 + Y^2$

$$W \triangleq X$$

Şeklinde tanımlı Z ve W rastlantı değişkenleri için $f_{ZW}(z, w)=?$

Bu cevabınızı kullanarak $f_Z(z)=?$ NOT: $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2)\right]$ olarak verilsin.

Soru 4) X rastlantı değişkeni $[0, 2]$ aralığında uniform olarak tanımlanmış olsun. $g(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmış ise $Y=g(x)$ şeklinde tanımlı Y rastlantı değişkeni için $f_Y(y)=?$



ESKİ SORULAR

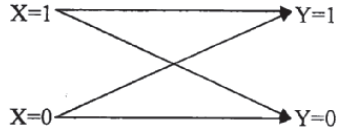
Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü



Olasılık ve Raslantı Değişkenleri Dersi
1. Quiz
9 Mart 2007

İsim: _____
No: _____

Puan) 1.



Yandaki ikili haberleşme sisteminde gönderilen 0 ve 1 ler bazen hatalı (0 yerine 1, ya da 1 yerine 0 olarak) olarak algılanabiliyor. Bu sisteme ilişkin "1" gönderme ve "1" alma bileşik olasılığı $P(X=1, Y=1)=0.4$ olarak, "0" gönderme ve "0" alma bileşik olasılığı ise $P(X=0, Y=0)=0.1$ olarak veriliyor.

Ayrıca sistemde "1" ler "0" ların 3 katı miktarda üretiliyor (yani $P(X=1)=4*P(X=0)$). Bu durumda alıcı tarafta $Y=1$ gözlemlendiğine göre "0" gönderilmiş olma ihtimali nedir?

Puan) 2. 9 arkadaş, 4'er kişilik iki takım halinde oynanacak bir oyun için iki gruba ayrılacaklar ve fazla olan bir kişi hakem olacaktır. Bunun için yazı tura atmaya karar verirler ve hakemi belirlemek için şu yöntemi seçerler:

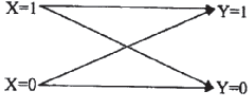
Eğer 8 kişi yazı bir kişi tura atarsa tura atan, eğer 8 kişi tura bir kişi yazı atarsa yazı atan hakem olacak ve geriye kalanlar oyuna dahil olacaktır. Diğer durumlar sözkonusu olduğunda hakem seçimi için yazı-tura atma işlemi tekrarlanacaktır.

Bu durumda ilk turda (yani ilk denemede) hakemin tespit edilebilmesi olasılığını hesaplayınız.

Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu



İsim: CEVAP ANAHTARI
No:

- (70 puan) 1.  Yandaki ikili haberleşme sisteminde gönderilen 0 ve 1 ler bazen hatalı olarak algılanabiliyor. Bu sisteme ilişkin "1" gönderme ve "1" alma bileşik olasılığı $P(X=1, Y=1)=0.4$ olarak, "0" gönderme ve "0" alma bileşik olasılığı ise $P(X=0, Y=0)=0.1$ olarak veriliyor.

Ayrıca sistemde "1" ler "0" ların 4 katı miktarda üretiliyor (yani $P(X=1)=4 \cdot P(X=0)$). Bu durumda alıcı tarafta $Y=1$ gözlemlendiğine göre "0" gönderilmiş olma ihtimali nedir?

$$P[X=0] + P[X=1] = 1 \Rightarrow P[X=0] + 4P[X=0] = 1 \Rightarrow \begin{cases} P[X=0] = 0,2 \\ P[X=1] = 0,8 \end{cases} \quad (10p)$$

$$P\{Y=1|X=1\} = \frac{P\{X=1, Y=1\}}{P\{X=1\}} = \frac{0,4}{0,8} = 0,5 \quad (10p)$$

$$P\{Y=0|X=0\} = \frac{P\{X=0, Y=0\}}{P\{X=0\}} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5, \quad P\{Y=1|X=0\} = 1 - P\{Y=0|X=0\} = 1 - 0,5 = 0,5 \quad (10p)$$

$$P\{X=0|Y=1\} = \frac{P\{Y=1|X=0\}P\{X=0\}}{P\{Y=1|X=0\}P\{X=0\} + P\{Y=1|X=1\}P\{X=1\}} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,5 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,8} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2 \quad (30p)$$

- (30 puan) 2. 9 arkadaş, 4'er kişilik iki takım halinde oynanacak bir oyun için iki gruba ayrılacaklar ve fazla olan bir kişi hakem olacaktır. Bunun için yazı tura atmaya karar verirler ve hakemi belirlemek için şu yöntemi seçerler:

Eğer 8 kişi yazı bir kişi tura atarsa tura atan, eğer 8 kişi tura bir kişi yazı atarsa yazı atan hakem olacak ve geriye kalanlar oyuna dahil olacaktır. Diğer durumlar söz konusu olduğunda hakem seçimi için yazı-tura atma işlemi tekrarlanacaktır.

Bu durumda ilk turda (yani ilk denemede) hakemin tespit edilebilmesi olasılığını hesaplayınız.

$$P_A \Rightarrow \text{8 yazı 1 tura} \quad A = \{8Y, 1T\} \quad \text{ve} \quad B = \{8T, 1Y\} \quad (10p)$$

Bu durumda aradığımız olasılık $P(A) + P(B)$ dir.

$$P(A) + P(B) = \binom{9}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \frac{1}{2} + \binom{9}{1} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9!}{8!1!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \frac{9!}{1!8!} \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= \frac{18}{2^9} = \frac{18}{512} = 0,0352$$

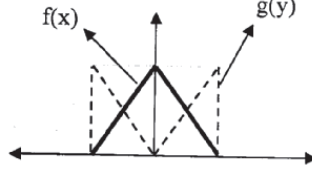
yan: %3,52 (20p)

Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu



İsim: _____
No: _____

Puan) 1.



Yandaki şekilde sürekli çizgiyle gösterilen X raslantı değişkenine ait $f(x)$ ve kesikli çizgilerle gösterilen Y raslantı değişkenine ait $g(y)$ olasılık yoğunluk fonksiyonlarının (pdf) varyansları hakkında aşağıdakilerden hangisi doğrudur? **Cevabınızı destekleyici açıklamalarınızı veya işlemlerinizi göstermelisiniz. (Cevabı destekleyici bilgi olmadığı takdirde soruya puan verilmeyecektir).**

- a. $(\sigma_Y)^2 > (\sigma_X)^2$ b. $(\sigma_Y)^2 < (\sigma_X)^2$ c. $(\sigma_Y)^2 = (\sigma_X)^2$

d. Verilen bilgilerle varyanslar arasında bir karşılaştırma yapmak mümkün değildir. (Hangi bilgilere ihtiyaç duyduğunuzu belirtin).

2. Kullanmakta olduğunuz radyo için bir pil aldığınızı ve bu pilin ömrünün (gün olarak) X raslantı değişkeni ile gösterildiğini düşünelim. Bu raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = ke^{-(x/2)}, \quad x \in (0, \infty) \quad \text{şeklinde verilsin}$$

- a. $k=?$
b. $P(X \geq t)$ için bir ifade elde ediniz. (Not: t zaman birimi).
c. $P(X \geq t+s | X \geq t)$ i bulunuz, $s \in (0, \infty)$. (Not: t ve s gün cinsinden zaman birimi). Bu bulduğunuz olasılık fonksiyonu t ve s zaman parametrelerinden hangilerine bağlıdır? Bu olasılık fonksiyonunu nasıl yorumlarsınız? (İpucu: Bayes teoreminden faydalanabilirsiniz. Önce $f_X(x)$ fonksiyonunu çizerseniz, Bayes teoreminde ihtiyaç duyacağınız $P(X \geq t+s, X \geq t)$ değeri için çizim size yardımcı olacaktır).
d. Pilinizi ilk aldığınızda 10 gün ömrünün olması, 1 ay (30 gün) kullandıktan sonra 10 gün daha ve 1 yıl (365 gün) kullandıktan sonra 10 gün daha ömrünün olması ihtimalleri arasında büyüklük küçüklük açısından nasıl bir ilişki vardır? (İpucu: c şıkta bulduğunuz cevabı dikkate alarak bu soruyu cevaplandırın)

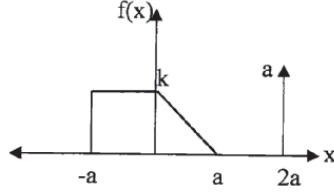
Başarılar.

Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu



İsim:
No:

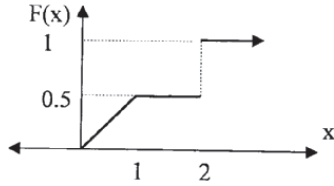
1. (2 puan)



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

- k 'yi "a" cinsinden hesaplayınız.
- $P(X > 0)$ olasılığını "a" cinsinden bulunuz.

2. (2 puan)



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait $F(x)$ olasılık dağılım fonksiyonu (PDF) verilmiştir. Buna göre;

- Beklendiği değer $E[X]=?$
- Standard sapma $\sigma =?$
- $P(0.5 < X \leq 1)=?$

Başarılar.



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

1. Olasılık ve Rastlantı değişkenleri dersinde istatistiklere göre sorulan **herhangi bir** soruyu **herhangi** bir öğrencinin doğru cevaplama olasılığı $p=0.3$ olarak biliniyor. Dersin hocası bir öğrenci soruyu doğru cevaplayana kadar rasgele seçtiği öğrencilere bir soru soruyor ve soru bilindiğinde yeni soru sorarak devam ediyor . Buna göre toplam 10 kişilik bir sınıfta; (*Not: Şıklar birbirinden bağımsızdır*)
- (puan) a. İlk sorulan soruyu 1. öğrenci bilemediğine göre 2. öğrencinin bilmesi olasılığı nedir?
- (puan) b. İlk sorunun doğru cevabını ilk 2 öğrencinin bilememesi ve ancak 3'üncü sorulan öğrencinin doğru cevabı verebilmesi olasılığı nedir?
- (puan) c. Sınıfın toplam mevcudu 10 kişi ise sınıfta ilk sorunun doğru cevabını sadece iki kişinin bilmesi olasılığı nedir?
- (puan) d. 7'inci öğrenciye ikinci sorunun sorulması ve 7'inci öğrencinin ikinci soruyu doğru cevaplama olasılığı nedir?

LÜTFEN SONUÇLARINIZI KUTU İÇİNE ALIN

Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

1. Bir haberleşme kanalında "0" gönderilme ihtimali $p(X=0)=0.6$ ve "1" gönderilme ihtimali $p(X=1)=0.4$ 'tür. Teknik bir arızadan dolayı "1" gönderildiğinde %30 ihtimalle "0", %70 ihtimalle "1" alınıyor. "0" gönderildiğinde ise herhangi bir hata olmuyor.
- puan) a. Alıcıda 0 alındığında vericiden 1 gönderilmiş olma olasılığı nedir?
puan) b. Alıcıya gelen ilk 5 bitten hepsi "0" olduğuna göre vericiden gönderilen ilk 5 bitten **4 tanesinin "0" ve sadece bir tanesinin "1"** olma olasılığı nedir?

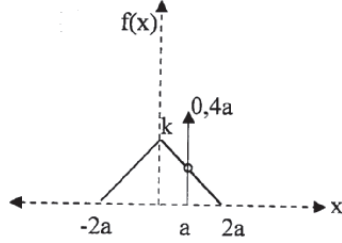
LÜTFEN SONUÇLARINIZI KUTU İÇİNE ALIN

Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika



Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

(20 puan) a) "a"nın alabileceği **en büyük** değer nedir?

b,c,d ve e şıkları için a=1 alarak

(30 puan) b) k'yı hesaplayınız.

(10 puan) c) X rastlantı değişkeninin alabileceği **en küçük** değer nedir?

(30 puan) d) PDF (Dağılım) fonksiyonunu çiziniz

(10 puan) e) $P(X>2)$ ve $P(X=1.5)$ olasılıklarını bulunuz.

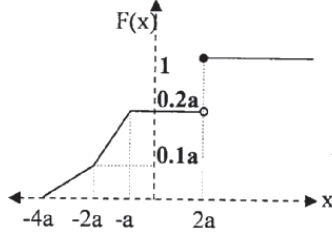
LÜTFEN SONUCLARINIZI KUTU İÇİNE ALIN

Başarılar.
Yrd. Doç Dr. Bülent Çavuşoğlu



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika



Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait $F(x)$ olasılık dağılım fonksiyonu (PDF) verilmiştir. Buna göre;

- (15 puan) a) "a"nın alabileceği **en büyük** değer nedir?
(15 puan) b) $a=0$ alınırsa $P(X=0)=?$

c,d,e ve f şıkları için $a=1$ alarak

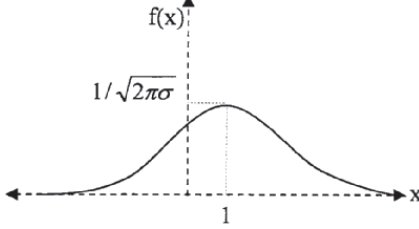
- (10 puan) c) X rastlantı değişkeninin alabileceği **en büyük** değer nedir?
(30 puan) d) pdf (yoğunluk) fonksiyonunu çiziniz.
(10 puan) e) $P(X < -1)$ ve $P(X = -0.5)$ olasılıklarını bulunuz.
(20 puan) f) $P(-3 < X < -1) = ?$



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

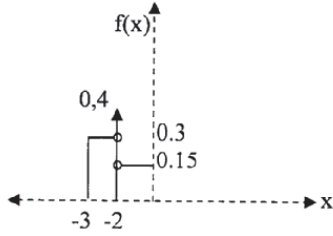
Soru 1:



Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu "**Normal**" yoğunluk fonksiyonu olup, $N(1,4)$ şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre;

- (20 puan) a) $P(0 < X < 1) = ?$
(20 puan) b) Olasılık dağılım fonksiyonunda $F(1) = ?$
(10 puan) c) X rastlantı değişkeni için bir aralık belirleyin. Bu aralıktaki değerleri alma olasılığı 0.5 olsun. (Cevabı $a < X \leq b$ şeklinde veriniz)

Soru 2:



Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

- (25 puan) a) $E[X] = ?$
(25 puan) b) $\sigma = ?$



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

Soru 1:

X ve Y rastlantı değişkenine ait $f_{XY}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} axy & 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \\ a(x+y) & 0 < x \leq 1, 1 < y \leq 2 \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde verilmiştir. Buna göre;

- 40 puan) a) $a=?$
40 puan) b) $P(X \leq 0.5, Y \leq X)=?$
20 puan) c) $P(X < 1)=?$



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 20 dakika

Soru 1:

X ve Y rastlantı değişkenine ait $f_{XY}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{XY}(x,y) = \{4xy \ ; \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

şeklinde verildiğine ve aşağıdaki dönüşümler yapıldığına göre;

$$W = X + Y$$

$$V = X - Y$$

40 puan)

a) $f_{WV}(w,v) = ?$

60 puan)

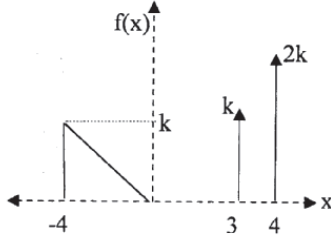
b) V ve W rastlantı değişkenleri bağımsız mıdır? (Not: cevabınızı destekleyici hesaplamaları göstermelisiniz)



İsim: _____
No: _____

Notlar Açık
Süre 50 dakika

Soru 1:



Yandaki şekilde X raslantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

- (15 puan) a) $k=?$
(15 puan) b) $E[X]=?$
(10 puan) c) $F(2)=?$

Soru 2:

Bir X rastlantı değişkeni $[1,5]$ aralığında uniform (düzgün) dağılıma sahiptir. Buna göre;

$Y = \frac{(X-3)}{2}$ ile verilen Y rastlantı değişkeni için

- (5 puan) a) $f(Y)$ 'yi çiziniz.
(5 puan) b) $E[Y]=?$
(5 puan) c) $\sigma_Y=?$

(5 puan) Soru 3:

Deney düzeneğinizde kullandığınız bir elektronik cihazın ömrünün üstel dağılıma sahip olduğunu kabul edin. Ortalama olarak böyle bir cihaz 2 yıl ömre sahiptir. Buna göre sizin deney düzeneğinizde kullandığınız bu cihazın ömrünün 4 yıldan fazla olması ihtimali nedir? (Not: Birimleri yıl cinsinden alın)



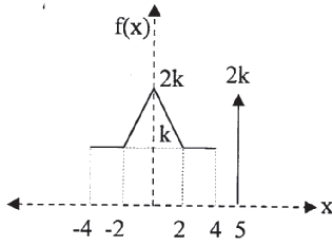
Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü
2007-2008 Bahar Dönemi
Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi

Final Sınavı

Soru 1:

- a) Elimizde bulunan A ve B diye etiketlendirdiğimiz iki ampülden bir tanesini rasgele seçiyoruz. Her iki ampülün de ömrü üstel dağılıma uyuyor. A ampülünün ortalama ömrü 4 gün, B ampülünün ortalama ömrü de 6 gün olarak veriliyor. Seçtiğimiz ampül 12 saat sonra hala daha çalıştığına göre A ampülünü seçmiş olma olasılığımız nedir?
- b) Aşağıdaki ifadelerin doğru ya da yanlış diye işaretleyin.
- $E[X] > E[Y]$ ise $E[X^2] > E[Y^2]$
 - $P(X > c) = 0.5$ ise $E[X] > 0.5$
 - $P(B) > 0$ ise $P(A|B) \geq P(B)$.
 - B ve C birbirine bağımlı olaylar ve A olayı bunlardan bağımsız bir olay ise.
 $P(A, B, C) = P(A|B) \cdot P(B|C) \cdot P(C)$

Soru 2:



Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu verilmiştir. Buna göre;

- (10 puan) a) $P(1 < X < 7) = ?$
- (10 puan) b) $P(3 < |X| \leq 4)$, $P(2 < |X| \leq 3)$, $P(1 < |X| \leq 2)$, $P(0 < |X| \leq 1)$ olasılıklarını büyüklük küçüklük ilişkisine göre sıralayın.

Soru 3:

Bir X rastlantı değişkeni varyansı 4 olan üstel (exponential) dağılıma sahiptir. Buna göre;

$X + Y = \frac{(3X - 5)}{2}$ ile verilen Y rastlantı değişkeni için

- (8 puan) a) f(Y) nin ifadesini bulun ve f(Y) yi çizin. (not: f(Y) nin tam ve açık ifadesini yazın)
(5 puan) b) E[Y]=?
(5 puan) c) σ_Y =?

Soru 4:

X ve Y rastlantı değişkenine ait $f_{XY}(x,y)$ birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 4xy & ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde verildiğine ve aşağıdaki dönüşümler yapıldığına göre;

$$W = \frac{X + Y}{2} \quad V = \frac{X - Y}{2}$$

- (8 puan) a) $f_{WV}(w,v)$ =? (Not: sınırları da belirtmelisiniz)
(8 puan) b) $P(0 < V < 1)$ =?
(10 puan) c) V ve W rastlantı değişkenleri ilişkili midir? (Not: cevabınızı destekleyici hesaplamaları göstermelisiniz)

Soru 5:

X, ve Y rastlantı değişkenleri bağımsız rastlantı değişkenleri olup ikisi de [0 1] aralığında düzgün (uniform) dağılıma sahiptirler. Buna göre;

$V=2X+3Y$ şeklinde tanımlanan V rastlantı değişkeni için

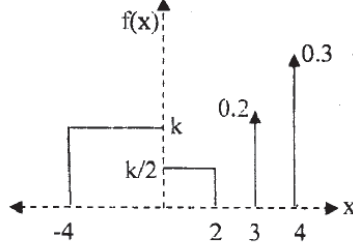
- (10 puan) a) V rastlantı değişkeninin karakteristik fonksiyonunu bulunuz?
(5 puan) b) V rastlantı değişkeninin standart sapması σ_V =?
(5 puan) c) $W=V^2$ şeklinde tanımlanan W rastlantı değişkeninin beklidik değeri E[W]=?



İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 50 dakika

Soru 1:



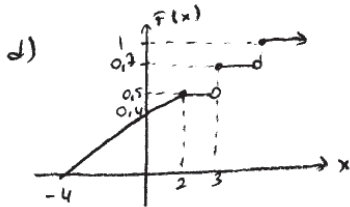
Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

- (10 puan) a) $k=?$
 (10 puan) b) $E[X]=?$
 (10 puan) c) $\sigma^2=?$
 (15 puan) d) Olasılık dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'i çizin.
 (5 puan) e) $P(X=2)=?$
 (5 puan) f) $P(1 < X < 4)=?$
 (5 puan) g) X rastlantı değişkeninin alabileceği maksimum değer kaçtır?

a) Alan dan = $4k + k + 0,2 + 0,3 = 1$
 $\Rightarrow k = 0,5$
 $k = 0,5$

b) $E[X] = \int_{-4}^0 x f(x) dx + \int_0^2 x f(x) dx + \int_2^3 x f(x) dx + \int_3^4 x f(x) dx$
 $= \int_{-4}^0 0,1x dx + \int_0^2 0,05x dx + \int_2^3 0,2x dx + \int_3^4 0,3x dx$
 $= \left. \frac{0,1x^2}{2} \right|_{-4}^0 + \left. \frac{0,05x^2}{2} \right|_0^2 + \left. 0,2x \right|_{x=2}^3 + \left. 0,3x \right|_{x=3}^4$
 $= -0,18 + 0,05 \cdot 2 + 0,6 + 1,2 = 1,1$

c) $E[X^2] = \int_{-4}^0 x^2 f(x) dx + \int_0^2 x^2 f(x) dx + \int_2^3 x^2 f(x) dx + \int_3^4 x^2 f(x) dx$
 $= \int_{-4}^0 0,1x^2 dx + \int_0^2 0,05x^2 dx + \int_2^3 0,2x^2 dx + \int_3^4 0,3x^2 dx$
 $= \left. \frac{0,1x^3}{3} \right|_{-4}^0 + \left. \frac{0,05x^3}{3} \right|_0^2 + \left. 0,2x^2 \right|_{x=2}^3 + \left. 0,3x^2 \right|_{x=3}^4$
 $= \frac{6,4}{3} + \frac{0,4}{3} + 1,8 + 4,8 = 8,87$
 $\sigma^2 = E[X^2] - (E[X])^2 = 8,87 - (1,1)^2 = 8,87 - 1,21 = 7,66$



- e) $p(x=2) = 0$
 f) $p(1 < x < 4) = 0,05 \cdot 1 + 0,2 = 0,25$
 g) $x = 4$

Soru 2:

Bir örnek uzayı sadece A ve B olaylarını içermektedir. $P(A)+P(B)=1$ ve $P(A|B)=P(B|A)=0.5$ olarak veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangileri **KESİNLİKLE** doğrudur? (Cevabı nasıl bulduğunuza dair işlemleri ya da açıklamaları göstermediğiniz cevaplara puan verilmeyecektir.)

- (10 puan) a) $P(A)=P(B)$
(10 puan) b) A ve B olayları bağımsızdır?

Soru 3:

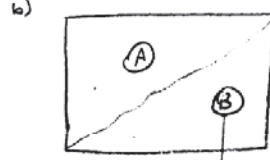
Bir sınıftaki not dağılımının $N(50,225)$ dağılımına uyduğu belirtildiğine göre;

- (10 puan) a) Sınıfta 100 kişi olduğu bilindiğine göre bu sınıfta 68 kişinin bulunabileceği bir not aralığı verin.
(10 puan) b) Sınıfta 50 ile 60 arasında alan kaç kişi vardır?

c-2) $P(B|A) = P(A|B) = 0.5$

$$\frac{P(A,B)}{P(A)} = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(B)$$



$$P(B) = 0.5$$

$$P(A,B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A,B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.5 \times 0.5 = 0.25$$

$$0.25 = P(A) \cdot P(B)$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$0.5 \quad 0.5$$

c-3) $N(50, 225)$
 \downarrow
 $N(50, 15^2)$

a) % 68, ...

1 σ aralığı olmalı $(50-15, 50+15) = (35, 65)$

$$b) \text{erf}\left(\frac{60-50}{15}\right) - \text{erf}\left(\frac{50-50}{15}\right)$$

$$= \text{erf}(0.66) - \text{erf}(0)$$

$$\approx 0.242$$

$$100 \times 0.242 \approx 24,11$$

Atatürk Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü

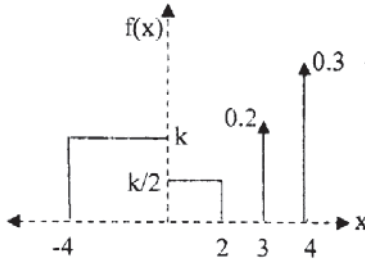


Olasılık ve Rastlantı Değişkenleri Dersi
Vize Sınavı
17 Nisan 2009

İsim:
No:

Notlar Açık
Süre 50 dakika

Soru 1:



Yandaki şekilde X rastlantı değişkenine ait $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) verilmiştir. Buna göre;

- (10 puan) a) $k=?$
(10 puan) b) $E[X]=?$
(10 puan) c) $\sigma^2=?$
(15 puan) d) Olasılık dağılım fonksiyonu $F(x)$ 'i çizin.
(5 puan) e) $P(X=2)=?$
(5 puan) f) $P(1 < X < 4)=?$
(5 puan) g) X rastlantı değişkeninin alabileceği maksimum değer kaçtır?

Soru 2:

Bir örnek uzayı sadece A ve B olaylarını içermektedir. $P(A)+P(B)=1$ ve $P(A|B)=P(B|A)=0.5$ olarak veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangileri **KESİNLİKLE** doğrudur? (Cevabı nasıl bulduğunuza dair işlemleri ya da açıklamaları göstermediğiniz cevaplara puan verilmeyecektir.)

10 puan)

a) $P(A)=P(B)$

10 puan)

b) A ve B olayları bağımsızdır?

Soru 3:

Bir sınıftaki not dağılımının $N(50,225)$ dağılımına uyduğu belirtildiğine göre:

10 puan)

a) Sınıfta 100 kişi olduğu bilindiğine göre bu sınıfta 68 kişinin bulunabileceği bir not aralığı verin.

10 puan)

b) Sınıfta 50 ile 60 arasında alan kaç kişi vardır?